1. Übung zur Vorlesung

NUMERISCHE MATHEMATIK II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Mittwoch, 23. Oktober, 14 Uhr

- Die Ausgabe der Übungszettel findet jeweils nach der Freitagsvorlesung statt. Alternativ kann der Übungszettel als Postscript-File über die Homepage von Marcus Weber abgerufen werden:

  http://www.zib.de/weber/

  Abgabe ist jeweils bis zum angegebenen Termin in der Mittwochsvorlesung.

- Zur Erlangung eines Übungsscheins ist die regelmäßige **aktive** Teilnahme an den Übungen Pflicht. Insbesondere wird erwartet, daß jeder Teilnehmer mindestens zweimal seine Lösung an der Tafel selbständig präsentiert.

- Programmieraufgaben sind ausführlich zu dokumentieren und zusammen mit den relevanten Matlabberechnungen/Grafiken auszudrucken.

- Wer 60% der möglichen Gesamtpunkte erreicht und regelmäßig an den Übungen (jeweils Freitag, 8.30 Uhr bis 10 Uhr, Raum 032) teilnimmt, erhält einen Übungsschein. Für einen benoteten Schein ist eine zusätzliche mündliche Prüfung zu vereinbaren.

1. Aufgabe *Konsistenzordnung* (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die explizite Eulerdiskretisierung

$$\Psi^{t+\tau,t}z = z + \tau f(t,z)$$

die Konsistenzordnung $p = 1$ besitzt, und zeigen Sie, dass die Trapezregel

$$\Psi^{t+\tau,t}z = z + \frac{\tau}{2}(f(t,z) + f(t+\tau,z))$$

die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

2. Aufgabe *Implizites Eulerverfahren* (3 Punkte)
Gegeben sei das folgende, autonome Anfangswertproblem für $y : [0, \infty[\to \mathbb{C}^m$

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

mit einer diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Für jeden Eigenwert λ_i von A gelte $Re\,\lambda_i \leq 0$. Zeigen Sie, dass für jede Wahl der Schrittweite $\tau > 0$ in einem impliziten Eulerverfahren die diskrete Evolution beschränkt bleibt.

3. Aufgabe *Wärmeleitungsgleichung* (2 Punkte)
Für die Diskretisierung $\partial_{xx}^h y$ der zweiten Ableitung y_{xx} nach der Raumvariablen x zur Schrittweite h in der Wärmeleitungsgleichung (1.1) aus der Vorlesung wird folgende Formel verwendet

$$\partial_{xx}^h y := \frac{1}{h^2}[y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)].$$

Zeigen Sie, dass

$$\partial_{xx}^h y = y_{xx} + \mathcal{O}(h^2).$$

4. Aufgabe *Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung* (3 Punkte)
Programmieren Sie die Lösung der diskreten Wärmeleitungsgleichung (siehe (1.2) aus der Vorlesung) für $y : [0, \infty[\times [0, 1.5] \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} &y_t - y_{xx} = 0, \\ &y(0,x) = 8x^4 - \frac{44}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{11}{3}x, \quad x \in [0, 1.5] \\ &y(t,0) = 0, \quad y(t, 1.5) = 1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Probieren Sie, für welche Diskretisierungsweite τ in der Zeitvariablen die numerische Lösung beschränkt bleibt, wenn man die Ortsvariabel x in 20, 40, 80 oder 160 äquidistante Intervalle unterteilt.

2. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 31. Oktober, 12 Uhr

1. Aufgabe *Eigenwerte einer Tridiagonalmatrix* (2 Punkte)
Zeigen Sie: Sei D eine reelle (n,n)-Tridiagonalmatrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} b & c & & \\ a & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c \\ & & a & b \end{pmatrix}$$

mit $ac > 0$. Dann besitzt D die Eigenwerte

$$\lambda_\mu = b + 2\sqrt{ac}\,\operatorname{sign}(a)\cos(\frac{\mu\pi}{n+1}), \quad 1 \le \mu \le n.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren $x^\mu \in \mathbb{R}^n$ haben die Komponenten

$$x^\mu_\nu = (\frac{a}{c})^{\frac{\nu-1}{2}} \sin(\frac{\mu\pi\nu}{n+1}), \quad 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le n.$$

2. Aufgabe *Definition der Steifheit* (3 Punkte)
Die Definition 1.2 für die Steifheit eines Anfangswertproblemes bezieht sich auf (n,n)-Matrizen A mit Spektralabszisse $\nu(A) < 0$. Folgende Matrix A hat die Eigenwerte $\{0, -5, -6\}$, also $\nu(A) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist also wegen des Quotienten in Definition 1.2 das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = (1,1,1)^T \quad (*)$$

als "unendlich" steif zu bezeichnen? (Zur Beantwortung der Frage überführen Sie durch Diagonalisierung von A das 3-dimensionale Anfangswertproblem in drei eindimensionale Anfangswertprobleme. Lösen Sie $(*)$ analytisch und bestimmen Sie eine Schrittweite τ, bei der die numerische Lösung mittels explizitem Eulerverfahren beschränkt bleibt.)

3. Aufgabe *Satz 1.10* (3 Punkte)
Beweisen Sie Satz 1.10 aus der Vorlesung: Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ hinreichend glatt und $y^* \in \mathbb{R}^m$ ein Fixpunkt des autonomen AWP

$$y' = f(y),$$

d.h. $f(y^*) = 0$. Es gelte $\nu(Df(y^*)) < 0$. Dann ist das AWP in y^* asymptotisch stabil.

4. Aufgabe *Räuber-Beute Modell* (2 Punkte)
Berechnen Sie von dem folgenden Differentialgleichungssystem (ein Räuber-Beute Modell) die Fixpunkte und charakterisieren Sie deren Stabilität. Welche Aussagen kann man über die Stabilität des linearisierten Differentialgleichungssystems in den Fixpunkten treffen?

$$\begin{aligned} x'(t) &= (500 - y(t))\, x(t) \\ y'(t) &= (x(t) - 500)\, y(t). \end{aligned}$$

3. Übung zur Vorlesung

NUMERISCHE MATHEMATIK II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 7. November, 12 Uhr

1. Aufgabe *Binomische Formel für Matrizen* (1 Punkte)
Zeigen Sie, dass für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $AB = BA$ gilt

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} A^{k-l} B^l \binom{k}{l}.$$

2. Aufgabe *Resolventenbedingung* (3 Punkte)
Zeigen Sie folgenden Spezialfall des Kreiss-Matrix-Theorems von 1962: Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ist die lineare Iteration $x_{n+1} = Ax_n$ genau dann stabil, wenn die *Resolventenbedingung*

$$||(z\,\mathrm{id} - A)^{-1}|| \leq \frac{C}{|z|-1} \quad \forall |z| > 1$$

für eine gewisse Konstante $C > 0$ gilt.
Hinweis: Argumentieren Sie mit den Nullstellen des Minimalpolynoms von $z\,\mathrm{id} - A$ und schauen Sie sich die Jordanform von A an.

3. Aufgabe *Neumann-Reihe* (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit Spektralradius $\rho(A) < 1$ die Matrix $(\mathrm{id} - A)$ invertierbar ist und es gilt:

$$(\mathrm{id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Hinweis: Betrachten Sie für die Partialsummen S_N den Ausdruck $(\mathrm{id} - A)S_N$.

4. Aufgabe *Analytische Entwicklung für Matrixfunktionen* (4 Punkte)
Seien p, q Polynome mit $q(0) = p(0) = 1$. Sei weiter die rationale Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) := p(z)/q(z)$. Zeigen Sie, dass für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $||A||$ hinreichend klein gilt:

$$p(A)q(A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, g^{(k)}(0)\, A^k.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass g in 0 analytisch ist. Und schreiben Sie $1/q(z)$ als $1/(1-(1-q(z))$, um die Neumann-Reihe anwenden zu können.

4. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 14. November, 12 Uhr

1. Aufgabe *Programmieraufgabe* (3 Punkte)
Programmieren Sie das Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung zur Lösung einer Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0.$$

Der diskrete Fluss $\Psi^{t+\tau,t}$ gehorcht dabei folgender Rechenvorschrift:

$$\begin{aligned}
\Psi^{t+\tau,t}y &= y(t) + \tau\{\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\} \\
k_1 &= f(t, y(t)) \\
k_2 &= f(t + \frac{\tau}{2}, y(t) + \frac{\tau}{2}k_1) \\
k_3 &= f(t + \frac{\tau}{2}, y(t) + \frac{\tau}{2}k_2) \\
k_4 &= f(t + \tau, y(t) + \tau k_3) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Probieren Sie das Verfahren für folgendes Anfangswertproblem aus

$$y' = Ay, \; y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Schätzen Sie bei diesem AWP die maximale Schrittweite τ, für die das Runge-Kutta-Verfahren noch stabil ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall das explizite Euler-Verfahren für jede Schrittweite $\tau > 0$ instabil ist.

2. Aufgabe *Stabilitätsgebiet* (2 Punkte)

a) Charakterisieren Sie die Stabilität des Anfangswertproblems (2) aus Aufgabe 1.

b) Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet für das Runge-Kutta-Verfahren (1) aus Aufgabe 1 und berechnen Sie daraus die charakteristische Zeitschrittweite τ_c für das AWP (2).

3. Aufgabe *rationale Approximation der* exp-*Funktion* (2 Punkte)
Gegeben sei eine rationale Funktion $g = p/q$ mit

$$g(z) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^{s+1}), \quad z \to 0.$$

Zeigen Sie, dass dann auch für die matrixwertige Funktion g gilt:

$$g(\tau A) = \exp(\tau A) + \mathcal{O}(\tau^{s+1}), \quad \tau \to 0.$$

4. Aufgabe *implizite Verfahren* (3 Punkte)
Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet und die Konsistenzordnung für folgendes implizites Radau-Verfahren. Zeigen Sie, dass es L-stabil ist. Gegeben ist das Butcher-Schema des Radau-Verfahrens:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

5. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 21. November, 12 Uhr

1. Aufgabe *Konsistzenordnung von Runge-Kutta Verfahren* (2 Punkte)
Zeigen Sie: Ein Runge-Kutta-Verfahren (α, β, ω) hat für alle (genügend oft stetig differenzierbaren) rechten Seiten f die Konvergenzordnung

i) $s = 1$, wenn gilt
$$\sum_{j=1}^{l} \omega_j = 1. \tag{3}$$

ii) $s = 2$, wenn (3) gilt und
$$\sum_{j=1}^{l} \omega_j \alpha_j = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

2. Aufgabe *Explizite Runge-Kutta Verfahren* (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein l-stufiges, explizites Runge-Kutta-Verfahren (α, β, ω), d.h $\beta_{ij} = 0$ für $j \geq i$, höchstens die Konsistenzordnung $s \leq l$ hat.

3. Aufgabe *L-Stabilität* (2 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist für ein Runge-Kutta-Verfahren (α, β, ω) die Matrix β invertierbar und der Zeilenvektor ω^T identisch mit einer Zeile der Matrix β, so ist $g(\infty) = 0$.

b) Zeigen Sie am Beispiel der impliziten Trapezregel, dass bei der Aussage in a) wesentlich ist, dass β invertierbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 1.28 aus der Vorlesung zur Bestimmung von $g(\infty)$. Verwenden Sie, dass mit einem Einheitsvektor e_j gilt $\omega^T = e_j^T \beta$.

4. Aufgabe E*xperimental* **O***rder of* **C***onvergence (EOC)* (4 Punkte)

Erklärung: Eine grafische Methode zur Bestimmung der Konvergenzordnung p eines Verfahrens geht folgendermaßen vor:
Für ein AWP $y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$, dessen Lösung $y(T)$ man zu einem festen Zeitpunkt $T > 0$ kennt, bestimmt man den Verfahrensfehler $e(\tau)$ für $\tau = T/N$, $N \in \mathbb{N}$, via

$$e(\tau) = ||y(T) - \tilde{y}(T)||,$$

wobei $\tilde{y}(T)$ die numerische Lösung zum Zeitpunkt T sei, die man in N Schritten errechnet.
Da $e(\tau) \approx C\tau^p$, wobei p die Konvergenzordnung ist, rechnet man

$$\frac{e(\tau_1)}{e(\tau_2)} \approx (\frac{\tau_1}{\tau_2})^p,$$

durch Auflösen nach der Konstanten p definiert man:

$$p \approx EOC := \frac{\log(e(\tau_1)) - \log(e(\tau_2))}{\log(\tau_1) - \log(\tau_2)}.$$

Man trägt also in einem Diagramm, z.B. für $N = 2, 4, 8, 16$ Diskretisierungsintervalle den Logarithmus des Verfahrensfehlers $\log(e(\tau))$ gegen den Logarithmus des Zeitschrittes $\log(\tau)$ auf.
Es müsste sich eine lineare Abhängigkeit zwischen diesen Größen einstellen.
Die Steigung der Geraden ist dann gerade der EOC (Experimental Order of Convergence).

Aufgabe: Bestimmen Sie grafisch die Konvergenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens (1) mittels AWP (2) und dem Programm aus dem 4.Übungsblatt. Wählen Sie dabei $N = 2, 4, 8, 16$ und $T = 1$. Benutzen Sie die euklidische Norm $|| \cdot ||$ zur Berechnung von $e(\tau)$.

6. Übung zur Vorlesung

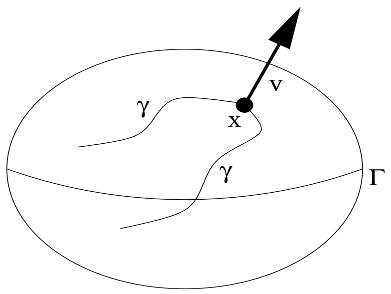
Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 28. November, 12 Uhr

1. Aufgabe *Flächennormale* (2 Punkte)
Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ eine glatte Hyperfläche.



Die Flächennormale $\nu : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ ist im Punkt $x \in \Gamma$ durch folgende Eigenschaft definiert: Sei $\gamma : [-1, 1] \to \Gamma$ eine glatte Kurve auf Γ mit $\gamma(0) = x$, dann gilt $\gamma'(0) \cdot \nu(x) = 0$. Weiter gilt die Normierung $|\nu(x)| = 1$.

a) Zeigen Sie, dass für die Fllächennormale ν bei der lokalen Darstellung von Γ als Graph mit Karte U

$$\Gamma \cap V := \{(x', u(x'))|x' \in U\}$$

gilt

$$\nu(x) = \pm \frac{(\nabla_{x'} u(x'), -1)}{|(\nabla_{x'} u(x'), -1)|}.$$

b) Zeigen Sie, dass für die Flächennormale ν bei der lokalen Darstellung von Γ als Nullstellenmenge

$$\Gamma \cap V := \{x \in V|\Psi(x) = 0\}$$

gilt

$$\nu(x) = \pm \frac{\nabla \Psi(x)}{|\nabla \Psi(x)|}.$$

2. Aufgabe *Oberflächenintegral im* $\mathbb{R}^3$ (2 Punkte)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche mit zugehörigem Homömorphismus $\Phi : U \to \Gamma \cap V$, die lokal in V durch einen Graph auf der Karte U dargestellt wird

$$\Gamma \cap V = \{(x', u(x'))|x' \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall für das Oberflächenintegral einer stetigen Funktion $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\Gamma \cap V} \rho(x) do_x = \int_U \rho(\Phi(x'))\sqrt{1 + |\nabla_{x'} u(x')|^2} dx'.$$

3. Aufgabe *Euler-Lagrange Gleichung* (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f := f(x, v, p)$ eine genügend glatte Funktion.
Für glatte v sei

$$J(v) := \int_\Omega f(x, v, \nabla v) dx.$$

Die Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$ erfülle

$$J(u + \delta\varphi) \geq J(u)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$.
Dann gilt:

$$div\, f_p(x, u, \nabla u) - f_v(x, u, \nabla u) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

4. Aufgabe *Folgerung (2.2)* (2 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatenz (2.1): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und n die Flächennormale auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω. Seien $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ genügend glatt, dann gilt für $i = 1, \ldots, d$

$$\int_\Omega \partial_i u(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \partial_i v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(y)\, v(y)\, n_i(y)\, do_y.$$

7. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 5. Dezember, 12 Uhr

1. Aufgabe *Hölder-Stetigkeit* (2 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass u Hölder-stetig $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $0 < \alpha \leq 1/2$ und nicht hölderstetig $u \notin C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $1/2 < \alpha \leq 1$ ist.

Hinweis: Für den ersten Teil nutzen Sie eine Fallunterscheidung nach $d \geq y$ und $d < y$ für $d = x - y$. Beachten Sie auch

$$u(x) - u(y) = \int_y^x \frac{1}{2\sqrt{s}} ds.$$

2. Aufgabe *Kettenregel* (1 Punkte)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R})$ mit $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, wobei $r := |x| = \sqrt{x^T x}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r \tilde{u}(r)).$$

3. Aufgabe *Laplacegleichung auf Kreisen* (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Lösung $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= 0, \qquad & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) &= 2x^2 - 1, \qquad & x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

4. Aufgabe *Fundamentallösung in 1D* (3 Punkte)
Sei $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$. Finde eine Fundamentallösung H der elliptischen

Differentialgleichung (3.1) auf Ω. D.h. finde eine Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $H(x,y) = \tilde{H}(|x-y|)$ und $-\tilde{H}''(s) = 0$ für $s \neq 0$ und

$$\int_\Omega H(x,y)\,(-\phi''(x))\,dx = \phi(y)$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Hinweis: Benutze partielle Integration und, dass ϕ' in 1 und -1 verschwindet.

8. Übung zur Vorlesung

NUMERISCHE MATHEMATIK II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 12. 12., 12 Uhr

1. Aufgabe *Trennung der Variablen* (3 Punkte)
Finden Sie eine Reihenentwicklung für eine Lösung $u : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$.

2. Aufgabe *EOC eines Differenzenverfahrens* (2 Punkte)
Erinnern Sie sich bitte an Aufgabe 4 von dem 5. Übungsblatt. Der EOC in Abhängigkeit von $h > 0$ kann nach der gleichen Methode für die Approximation des Laplace-Operators $-\Delta_h u$ für eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ berechnet werden.
Ermitteln Sie den EOC für $-\Delta_h u$ jeweils im Punkt $x = 1$ und $x = 0$ für $u(x) = |x|^{3.4}$ mit $h = \{0.5, 0.25, 0.125, 0.0625\}$.

3. Aufgabe *Differenzensterne höherer Ordnung* (4 Punkte)
Im folgenden sollen Gewichte $\omega_j \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$(\mathcal{L}_h u)(x) := \frac{1}{h^k} \sum_{j=-l}^{l} \omega_j \, u(x + jh)$$

die $k-te$ Ableitung $\partial^k u$ einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ von der Ordnung s approximiert, d.h.

$$(\mathcal{L}_h u)(x) - \partial^k u(x) = \mathcal{O}(h^s).$$

Dazu zeige man:

i) $\mathcal{L}_h$ approximiert ∂^k von der Ordnung s, genau dann wenn

$$\sum_{j=-l}^{l} \omega_j \, j^i = \delta_{ik} \, k!, \quad i = 0, \ldots, k+s-1.$$

ii) $\mathcal{L}_h$ approximiert ∂^k von der Ordnung s, genau dann wenn $(\mathcal{L}_h p)(0) = \partial^k p(0)$ für alle Polynome $p \in P_m$ mit $m = k + s - 1$.

iii) Finde ein Differenzenquotient, der u'' von der Ordnung 4 approximiert.

iv) Finde einen Differenzenstern 4. Ordnung für $-\Delta$ in $\mathbb{R}^2$.

9. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 19. Dezember, 12 Uhr

1. Aufgabe *Verfahren des steilsten Abstiegs I* (2 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ s.p.d. und $J(v) := \frac{1}{2}\, v\cdot Av - f\cdot v$ mit einem $f \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt:

i) $\nabla J(v) = Av - f$.

ii) Falls für die Abstiegsrichtung $d \neq 0$ gilt, so existiert für $v \in \mathbb{R}^N$ genau eine Lösung $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ von

$$J(v + \bar{\alpha} d) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} J(v + \alpha d)$$

und

$$\bar{\alpha} = \frac{d\cdot d}{d\cdot Ad}.$$

Dabei sei $d := -(Av - f)$.

2. Aufgabe *Verfahren des steilsten Abstiegs II* (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ s.p.d. und $J(v) := \frac{1}{2}\, v\cdot Av - f\cdot v$. Weiter sei $u \in \mathbb{R}^N$ Lösung von $Au = f$. Dann gilt:

i) $J(v) = J(u) + \frac{1}{2}||v - u||_A^2$.

ii) Für die Iterierten u^i im Verfahren des steilsten Abstiegs gilt:

$$J(u^{i+1}) = J(u^i) - \frac{1}{2}\frac{(d^i\cdot d^i)^2}{d^i\cdot Ad^i}.$$

iii) Für den Fehler $e^i := u - u^i$ gilt:

$$||e^{i+1}||_A^2 = ||e^i||_A^2 - \frac{(d^i\cdot d^i)^2}{d^i\cdot Ad^i}.$$

iv) $||e^i||_A^2 = d^i A^{-1} d^i$.

3. Aufgabe *Konvexe Funktionen* (1 Punkte)
Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum $u^* \in \mathbb{R}^N$ einer konvexen Funktion $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ auch absolutes Minimum von J ist.
Hinweis: Eine Funktion $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt: $J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.

4. Aufgabe *Programmieraufgabe* (4 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2), \qquad & x \in \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ u = 0, \qquad & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Diskretisieren Sie das Rechteck Ω mit den Gitterweiten $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ und ersetzen Sie den Laplace-Operator durch $-\Delta_h$. Lösen Sie die diskretisierte Form von (5) für die Gitterfunktion U mit Hilfe des Verfahren des steilsten Abstiegs. Wählen Sie dabei $U \equiv 0$ als Startwert und überlegen Sie sich ein geeignetes Abbruchkriterium. Stellen Sie die erhaltene Lösung graphisch (z.B. mit Matlab) dar. Berechnen Sie den EOC über die Maximumsnorm $\tau_h := \sup_{x\in\Omega_h} |U(x) - u(x)|$. Die exakte Lösung der Differentialgleichung lautet dabei: $u(x) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$.
Hinweis: Programmieren Sie modular, da wir in Zukunft das Verfahren des steilsten Abstiegs durch einen anderen iterativen Gleichungslöser ersetzen wollen.

5. Aufgabe *Zusatzaufgabe* (4 Punkte)
Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe, deren Punkte nicht in die Gesamtpunktzahl eingehen. Abgabe nach Weihnachten! Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und u eine Lösung von $-u'' = f$ in Ω, sowie $u = g$ auf $\partial\Omega$. Sei U eine Lösung der diskretisierten Form (siehe Formel (4.5) aus der Vorlesung).
Zeigen Sie:

$$\sup_{\Omega_h} |U - R_h u| = \mathcal{O}(h^2).$$

Hinweis: Modifizieren Sie die Testfunktion W im Beweis zu Satz 4.8 aus der Vorlesung entsprechend.

10. Übung zur Vorlesung

NUMERISCHE MATHEMATIK II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 16. Januar, 12 Uhr

1. Aufgabe *CG-Verfahren* (5 Punkte)
(Vergleichen Sie auch Aufgabe 4 auf dem 9. Übungsblatt)
Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u = \pi^2 \sin(\pi x_1)(5\cos(2\pi x_2) - 1), &\qquad x \in \Omega := (0,1) \times (0,1) \\ u = 0, &\qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6}$$

Diskretisieren Sie das Rechteck Ω mit den Gitterweiten $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ und ersetzen Sie den Laplace-Operator durch $-\Delta_h$. Lösen Sie die diskretisierte Form von (6) für die Gitterfunktion U mit Hilfe des Verfahren der konjugierten Gradienten. Wählen Sie dabei $U \equiv 0$ als Startwert und überlegen Sie sich ein geeignetes Abbruchkriterium. Stellen Sie die erhaltene Lösung graphisch (z.B. mit Matlab) dar. Berechnen Sie den EOC über die Maximumsnorm $\tau_h := \sup_{x \in \Omega_h} |U(x) - u(x)|$. Die exakte Lösung der Differentialgleichung lautet dabei: $u(x) = \sin(\pi x_1)(\cos(2\pi x_2) - 1)$.
Vergleichen Sie die benötigte Zahl an Iterationen im Verfahren des steilsten Abstiegs mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten.

2. Aufgabe *Youngsche Ungleichung* (1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

(b) Folgern Sie daraus, dass für alle $\delta > 0$

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta}b^2.$$

(∗) *Ohne Wertung:* Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung: Für alle $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

für $1 \leq p, p' < \infty$ mit $1/p + 1/p' = 1$.

3. Aufgabe *Dualraum* (2 Punkte)
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für ein lineares Funktional $l : X \to \mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum X mit Norm $||x|| := \sqrt{(x, x)}$:

i) l ist stetig.

ii) l ist stetig in $x = 0$.

iii)

$$\sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|l(x)|}{||x||} < \infty.$$

4. Aufgabe *Parallelogrammidentität* (2 Punkte)
Sei X ein normierter Vektorraum mit einer Norm $||\cdot||$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$ die Parallelogrammidentität

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

gilt, falls sich $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ mit einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ schreiben lässt. Geben Sie Ω und Funktionen $x, y \in C^0(\bar{\Omega})$ an, so dass für die Maximumsnorm $||\cdot||_{max}$ die Parallelogrammidentität nicht erfüllt ist.

11. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 23. Januar, 12 Uhr

1. Aufgabe *Unterraumeigenschaft von L^p* (2 Punkte)
Zeigen Sie: Sei Ω ein beschränktes Gebiet und p, q mit $1 \leq q \leq p \leq \infty$, dann gilt

$$L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega).$$

2. Aufgabe *Produktregel in $H^{1,1}$* (3 Punkte)
Beweisen Sie für ein beschränktes Gebiet Ω die folgenden Aussagen:

i) Gegeben sei eine Folge $w_k \in L^p$ mit $w_k \to w \in L^p$ für $k \to \infty$, dann gilt für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega w_k(x)\, \varphi(x)\, dx \to \int_\Omega w(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad k \to \infty.$$

ii) Seien $u \in H^{1,p}$ und $v \in H^{1,q}$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt in $H^{1,1}$ die Produktregel der schwachen Ableitung:

$$\partial_i(uv) = (\partial_i u)v + u(\partial_i v).$$

3. Aufgabe *Sobolev-Zahlen* (2 Punkte)
Setzen Sie folgendes voraus (ohne Beweis): Sei Ω ein beschränktes Gebiet und $x_0 \in \Omega$, weiter $u \in C^1(\Omega \setminus \{x_0\}) \cap C^0(\bar{\Omega})$, dann gilt:

$$u \in H^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \nabla u \in L^p(\Omega),$$

wobei ∇u die Ableitung im klassischen Sinne darstellt.
Gegeben $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) := |x|^\alpha$. Für welche $1 \leq p \leq \infty$ und $\alpha > 0$ gilt $u \in H^{1,p}$?

4. Aufgabe *Berechnung schwacher Ableitungen* (3 Punkte)

i) Seien $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $f \circ u \in H^{1,p}$ mit $\partial_i(f \circ u) = f'(u)\partial_i u$.

ii) Seien $u \in H^{1,p}(\Omega)$ und $u^+(x) := max\{u(x), 0\}$, dann gilt $u^+ \in H^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\partial_i u^+ = \begin{cases} \partial_i u, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie zur Lösung von Teil ii) die Funktion

$$f_\epsilon(u) := \begin{cases} (u^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

12. Übung zur Vorlesung

NUMERISCHE MATHEMATIK II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 30. Januar, 12 Uhr

1. Aufgabe *Beweis von Satz 6.14* (3 Punkte)
Betrachte die schwache Formulierung (6.7) des Problems (6.6) mit den Regularitätsvoraussetzungen:

$$
\begin{array}{ccc}
k, \lambda \in L^\infty(\Omega), & \alpha \in L^\infty(\Gamma_N), & f \in L^2(\Omega), \\
\int\limits_{\Gamma_D} 1 > 0, & k \geq c_0 > 0, & g \in L^2(\Gamma_N), \\
 & u_D \in H^{1,2}, & \alpha, \lambda \geq 0.
\end{array}
$$

Beweise Satz 6.14 der Vorlesung: Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt:

i) $a : X \times X \to \mathbb{R}$ ist stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform, $l : X \to \mathbb{R}$ ist stetige Linearform.

ii) Es existiert genau eine schwache Lösung u von (6.7).

2. Aufgabe *Shift-Theorem in 1D* (2 Punkte)

Sei $\Omega = (0,1), X = \mathring{H}^{1,2}(\Omega), f \in L^2(\Omega)$ und u die schwache Lösung von

$$
\begin{aligned}
-u'' &= f \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

d.h. es gilt:

$$\int\limits_\Omega u'\varphi' = \int\limits_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in X.$$

Dann gilt $u \in H^{2,2}(\Omega)$ und

$$u'' = -f.$$

3. Aufgabe *Regularität des Randes* (3 Punkte)
Wie in der Bemerkung ii) zum Satz 6.16 (Shift-Theorem) sei
$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < r < 1, 0 < \theta < \alpha\pi\}$ für $1 < \alpha < 2$. Zeigen Sie

i) $\nabla u = \partial_r u\, e_r + r^{-1}\, \partial_\theta u\, e_\theta$ mit $e_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ und $e_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

ii) Für welche $1 < p < \infty$ gilt $u \in H^{1,p}(\Omega)$?

iii) $u \notin H^{2,2}(\Omega)$. Hinweis: $H^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow H^{1,q}(\Omega)$ für alle $1 < q < \infty$.

4. Aufgabe *Berechnung einer schwachen Lösung* (2 Punkte)
Betrachte folgendes Problem für $\Omega = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} -(k(x)u'(x))' &= 0, \quad x \in \Omega \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 1, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei

$$k(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}.$$

i) Bestimmen Sie eine schwache Lösung von (7).

ii) Existiert eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ von (7)?

13. Übung zur Vorlesung

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2002/2003

E. Bänsch, M. Weber

Abgabe bis Donnerstag, 6. Februar, 12 Uhr

1. Aufgabe *Beweis von Satz 6.22* (2 Punkte)

i) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Monome x^α für $x \in \mathbb{R}^d$ und $|\alpha| \leq k \in \mathbb{N}$ und folgern Sie daraus

ii)
$$dim\, \mathbf{P}_k = \binom{d+k}{d}.$$

2. Aufgabe *Interpolationsoperator* (2 Punkte)
Sei $\mathcal{T}_h$ eine konforme Triangulierung von Ω und $v \in C^0(\bar{\Omega})$. Dann nennt man

$$(I_h v)(x) := \sum_{x_i \in \mathcal{N}_h^k} v(x_i)\varphi_i(x)$$

den *Lagrange-Interpolations-Operator*.
Zeigen Sie, dass gilt:

i) I_h ist eine Projekjtion, d.h. $I_h v = v$, falls $v \in S_h^k$.

ii) $v \in C^0(\bar{\Omega})$ mit $v|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow (I_h v)|_{\partial\Omega} = 0$.

3. Aufgabe *Basispolynome* (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Basispolynome $\varphi_i \in S_h^k$ für $d = 1$ und $k = 1, 2, 3$ und stellen Sie diese graphisch dar.

4. Aufgabe *Curse of dimension (Abgabe in der Übungsstunde)* (4 Punkte)
Basteln Sie aus Papier oder Styropor eine konforme Triangulierung des Einheitswürfels mit 6 Simplices. Das Volumen des Standartsimplex in $d = 3$

beträgt 1/6, können Sie auch eine Triangulierung des Einheitswürfels basteln, in der alle Simplices kongruent sind zum Standartsimplex?
Hinweis: Wir haben zur Lösung der Aufgabe eine Ananas verwendet, aus Gründen der Haltbarkeit rate ich aber davon ab.