Klausur Mathematik II, FU Berlin

PD Dr. Marcus Weber

25.02.2025

Name und Unterschrift: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die jeweils(!) unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.
- Die Klausur besteht aus acht Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.
- Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 200 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist angegeben. Mit 100 erreichten Punkten ist die Klausur bestanden.
- Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.
- Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).
- Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Maximale Punkte	25	25	20	30	30	25	25	20	200
Erreicht									
Note									

VOM DOZENTEN AUSZUFÜLLEN

1. (25 Punkte) **Mehrdimensionale Optimierung**

   Gegeben sei folgende 2-dimensionale Funktion

   $$f(x, y) = x^2 + y(x - 1).$$

   (a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix dieser Funktion.

   (b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

   (c) Bestimmen Sie für einen kritischen Punkt, ob es sich um ein Minumum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. Gegebenenfalls ermitteln Sie die Sattelpunktordnung.

2. (25 Punkte) **Kurvenintegral 2. Art**

   Gegeben sei folgendes Kurvenintegral zweiter Art

   $$\int_C \cos(x + y)\, dx + (\cos(x + y) + 2y)\, dy,$$

   wobei die Kurve C im Punkt $(1; -1)$ beginnt und im Punkt $(2; -2)$ endet.

   (a) Begründen Sie, dass das Integral wegunabhängig ist.

   (b) Bestimmen Sie alle Potentialfunktionen des Integrals, also alle Funktionen $f(x, y)$, die partiell nach x abgeleitet $\cos(x + y)$ und partiell nach y abgeleitet $\cos(x + y) + 2y$ ergeben.

   (c) Geben Sie den Zahlenwert des Integrals an.

3. (20 Punkte) **Fourier-Transformation**

   Gegeben sei folgende stückweise definierte Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

   Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[f](\omega)$ dieser Funktion.

4. (30 Punkte) **Lösung linearer Gleichungssysteme**

   Gegeben seien:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie das Bild und den Kern der Matrix A. Welchen Rang und welchen Defekt hat die Matrix?

   (b) Begründen Sie durch eine Rechnung, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^4$ keine Lösung besitzt.

   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $Ax = \hat{b}$ für $x \in \mathbb{R}^4$.

5. (30 Punkte) **Diagonalisierbarkeit von Matrizen**

   Gegeben sei:
$$A = \begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 & 48 \\ -4 & 20 & 0 & 16 \\ -6 & -6 & 18 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Es sei bekannt, dass das charakteristische Polynom dieser Matrix nur die Nullstellen $\lambda_1 = 24$ und $\lambda_2 = 0$ besitzt. Welche Kombinationen von algebraischen Vielfachheiten sind möglich?

   (b) Bestimmen Sie jeweils die geometrische Vielfachheit der beiden Eigenwerte.

   (c) Begründen Sie, dass die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

6. (25 Punkte) **Eigenschaften von Matrizen**

   Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass A orthogonal ist. Ist die lineare Abbildung winkel- und längentreu?

   (b) Ist die Matrix symmetrisch? unitär? hermitesch?

   (c) Zeigen Sie, dass die durch A dargestellte lineare Abbildung orientierungsumkehrend ist.

   (d) Berechnen Sie die Vektoren, die die Spiegelebene der linearen Abbildung aufspannen. (Tipp: Überlegen Sie sich zunächst, welcher Eigenwert zu diesen Vektoren gehört)

7. (25 Punkte) **Gram-Schmidt-Verfahren**

   Gegeben sei folgendes Skalarprodukt:
$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$
   und die komplexen Funktionen
$$u_1(x) = e^{ix}, \quad u_2(x) = e^{2ix}.$$
   Überführen Sie die Funktionen mittels Gram-Schmidt-Verfahrens in ein Orthonormalsystem.

8. (20 Punkte) **Lineare Differentialgleichungssysteme**

   Eine 3×3-Matrix A habe eine Darstellung der Form $A = X \Lambda X^{-1}$ mit den Matrizen:
$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit einem zeitabhängigen dreidimensionalen Vektor x?

Viel Erfolg!