Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie
Lösungen zu Übung 10

Lineare Algebra

1.
$$\mathsf{A}+\mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&5&0\\0&-1&1\\0&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7&0\\3&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}=\mathsf{B}+\mathsf{A}$$
$$\mathsf{CD}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\3&4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&3\\3&7\end{pmatrix}=\mathsf{DC}$$

2. (a) Inhomogenes LGS (bestehend aus 4 Gleichungen für 4 Unbekannte) als Matrix-Vektor-Gleichung $\mathsf{A}\,\underline{x}=\underline{b}$ und als erweitertes Koeffizientenschema $(\mathsf{A}\,|\,\underline{b})$:
$$\left.\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix}\quad\right\}\Leftrightarrow\left\{\quad\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\2&3&4&1&2\\3&4&1&2&2\\4&1&2&3&-2\end{array}\right)\right.$$

(b) Anwendung des (einfachen) Gauss-Algorithmus zur Lösung des LGS:
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\2&3&4&1&2\\3&4&1&2&2\\4&1&2&3&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\0&-1&-2&-7&6\\0&-2&-8&-10&8\\0&-7&-10&-13&6\end{array}\right)\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-2(1)\\(3')=(3)-3(1)\\(4')=(4)-4(1)\end{array}$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\0&-1&-2&-7&6\\0&0&-4&4&-4\\0&0&4&36&-36\end{array}\right)\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=(3')-2(2')\\(4'')=(4')-7(2')\end{array}$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&-2\\0&1&2&7&-6\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}(1)\\(2''')=-(2')\\(3''')=-(3'')/4\\(4''')=((4'')+(3''))/40\end{array}$$

Sowohl die (transformierte) Matrix $\tilde{\mathsf{A}}$ wie das (transformierte) erweiterte Koeffizentenschema $(\tilde{\mathsf{A}}\,|\,\tilde{\underline{b}})$ haben Rang 4 $\Rightarrow$ das LGS hat eine eindeutige Lösung.

Lösen der Gleichungen von unten nach oben (sogenanntes „Rückwärtseinsetzen“):
$(4''')$ heisst $x_4=-1$;
$(3''')$ ergibt $x_3=1+x_4=0$;
$(2''')$ ergibt $x_2=-6-2x_3-7x_4=+1$;
(1) ergibt schliesslich $x_1=-2-2x_2-3x_3-4x_4=0$.

Probe: Der Vektor $\underline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^\top=(0,1,0,-1)^\top$ erfüllt (tatsächlich / selbstverständlich) das zu Anfang gegebene LGS $\mathsf{A}\,\underline{x}=\underline{b}$.

Anmerkung: Der Gauss-Algorithmus kann fortgesetzt werden, um Nullen nicht nur *unterhalb* der Diagonalen des Matrixteils des erweiterten Koeffizientenschemas (s. o.), sondern auch *oberhalb* davon zu erzeugen. Bei dem hier behandelten LGS wäre der nächste Schritt dazu der Ersatz von Gl. $(3''')$ durch $(3''')+(4''')$. Dadurch wird aus dem Matrixteil des erweiterten Koeffizientenschemas schliesslich die Einheitsmatrix E, und an der Stelle, wo sich ursprünglich der Vektor $\underline{b}$ befand, lässt sich der gesuchte Lösungsvektor $\underline{x}$ direkt ablesen ($\mathsf{A}\,\underline{x}=\underline{b}\rightsquigarrow\mathsf{E}\,\underline{x}=\underline{x}$).

3. (a) Drehmatrizen $\mathsf{R}_z(\phi)$ für Drehungen um die z-Achse mit Drehwinkeln $\phi = \pi$ und $\phi = \pi/2$:

$$\mathsf{R}_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathsf{R}_z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Drehung des Vektors $\underline{r} = (2, 1, 0)^\top$ um die z-Achse mit Drehwinkel ...

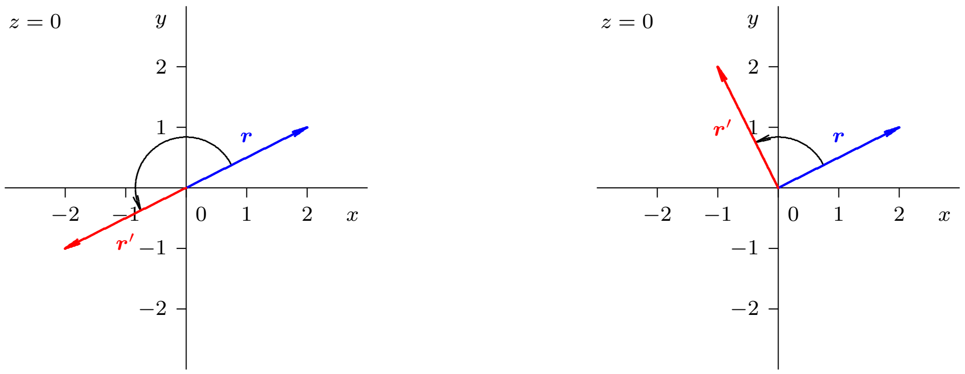
... $\phi = \pi$:

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

... $\phi = \pi/2$:

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Graphische Lösung (Drehung um $\phi > 0$ erfolgt natürlich in mathematisch positiver Richtung, d. h., **gegen** den Uhrzeigersinn):



Es lässt sich nun leicht aus den beiden Abbildungen ablesen, dass in beiden Fällen die Koordinaten der Endpunkte der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}'$ mit den in (b) erhaltenen, an den Spaltenvektoren $\underline{r}'$ direkt ablesbaren Koordinaten übereinstimmen.