Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie
Übung 10

Lineare Algebra (Rechnen mit Vektoren und Matrizen, lineare Gleichungssysteme)

1. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die folgenden Matrixoperationen durch: $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ und CD. Überzeugen Sie sich, dass $\mathsf{CD} \neq \mathsf{DC}$ ist.

2. (a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array}$$

als Matrix-Vektor-Gleichung $\mathsf{A}\,\underline{x} = \underline{b}$.

(b) Lösen Sie das LGS durch Anwendung des Gauss-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix. Prüfen Sie anschliessend Ihr Resultat $\underline{x}$ durch Einsetzen in das ursprüngliche LGS.

3. Die Drehung eines Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ um die z-Achse mit Drehwinkel ϕ ergibt einen Bildvektor $\boldsymbol{r}'$, der durch Anwendung eines Drehoperators $\widehat{R}(\phi \boldsymbol{e}_z)$ auf diesen Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ erhalten werden kann:

$$\boldsymbol{r}' = \widehat{R}(\phi \boldsymbol{e}_z)\,\boldsymbol{r}\,.$$

In der gewohnten orthonormalen Basis eines rechtshändigen kartesischen Achsensystems wird dies übersetzt in die Multiplikation des Spaltenvektors $\underline{r}$ mit einer Drehmatrix (für Drehung um die z-Achse)

$$\mathsf{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zur Berechnung des Spaltenvektors $\underline{r}'$:

$$\underline{r}' = \mathsf{R}_z(\phi)\,\underline{r}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Drehmatrizen $\mathsf{R}_z(\phi)$ für Drehungen um $\phi = \pi$ (180°) und um $\phi = \pi/2$ (90°).

(b) Drehen Sie nun den Vektor $\underline{r}^\top = (2, 1, 0)$ mit Hilfe der Matrizen aus (a) um $\phi = \pi$ (180°) und um $\phi = \pi/2$ (90°).

(c) Bestätigen Sie Ihre Rechnung durch Vergleich mit einer graphischen Lösung (Skizze der xy-Ebene mit $\boldsymbol{r}$ und den beiden, daraus durch Drehung erhaltenen Vektoren $\boldsymbol{r}'$).