Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie
Lösungen zu Übung 8

Differentiation und Integration

1. (a) $y = x^2 \sin(x) \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$ (Produktregel)

   (b) $y = \dfrac{x}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (Quotientenregel)

   (c) $y = \dfrac{x^2}{2-x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2x(2-x) - x^2 \cdot (-1))}{(2-x)^2} = \dfrac{x(4-x)}{(2-x)^2}$ (Quotientenregel)

   (d) $y = x^2 \, \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \, \mathrm{e}^x + x^2 \, \mathrm{e}^x = x(2+x)\mathrm{e}^x$ (Produktregel)

   (e) $y = 2^x \, x^2 = \mathrm{e}^{x \ln(2} \, x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \ln(2) \, \mathrm{e}^{x \ln(2)} \, x^2 + 2^x \, 2x = x \, 2^x \, ((\ln(2)) \, x + 2)$ (Produktregel)

   (f) $y = \sin(x^2) \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \cos(x^2)$ (Kettenregel)

   (g) $y = \sin^2(x) \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \sin(x) \cos(x)$ (Kettenregel oder Produktregel)

   (h) $y = (x + \cos(x))^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2(x + \cos(x))(1 - \sin(x))$ (Kettenregel)

2. (a) $y = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ $(D = \mathbb{R})$. Die Funktion ist ein Polynom vom Grad 4. Das Schaubild zeigt die um 1 nach unten verschobene Funktion x^4 $(W = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq -1\})$. Für $|x| \to \infty$ geht $y \to +\infty$. Von den vier Nullstellen des Polynoms ($x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \mathrm{i}$, $x_4 = -\mathrm{i}$) liegen nur zwei auf der reellen Achse (x_1 und x_2). Ableitungen und deren Nullstellen: $y' = 4x^3$ $(y'(0) = 0)$, $y'' = 12x^2$ $(y''(0) = 0)$, $y''' = 24x$ $(y'''(0) = 0)$. An der Stelle $x_5 = 0$ liegt also ein stationärer Punkt vor. Dieser ist kein Wendepunkt mit horizontaler Tangente, sondern ein Minimum.

   (b) $y = \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ $(D = \mathbb{R} \setminus \{1\})$. Die Funktion ist eine *unechte* gebrochen-rationale Funktion, die auch als Summe aus der konstanten Funktion 1 und der um 1 nach rechts verschobenen Hyperbel $1/(x-1)$ ($1/t$ mit $t = x - 1$) geschrieben werden kann $(W = \mathbb{R})$. An der Stelle $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle des Zählers) hat die Funktion ihre einzige Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel). Die Stelle $x_2 = 1$ (einfache Nullstelle des Nenners) ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel ($\varepsilon > 0$):

   $$x = 1 - \varepsilon \text{ (von links):} \qquad \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon-1} = \frac{1-\varepsilon}{-\varepsilon} \to -\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$
   $$x = 1 + \varepsilon \text{ (von rechts):} \qquad \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \to +\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

   Das Verhalten für $|x| \to \infty$ wird duch die Asymptote $y = 1$ beschrieben. Es gibt ausser der Nullstelle $x_1 = 0$ keine weiteren Achsenschnittpunkte. Die ersten Ableitungen — $y' = -1/(x-1)^2$ (s. oben Aufg. 1(b)), $y'' = +2/(x-1)^3$, $y''' = -6/(x-1)^4$ — besitzen keine Nullstellen, es gibt daher weder Extrema noch Wendepunkte.

3. Hier ist zu beachten, dass jeweils alle drei Funktionen $f'(x)$, $f(x)$ und $F(x)$ denselben Definitionsbereich haben sollen (soweit möglich).

$f'(x)$ ⇔	$f(x)$ ⇔	$F(x) + C$	$f'(x)$ ⇔	$f(x)$ ⇔	$F(x) + C$	$f'(x)$ ⇔	$f(x)$ ⇔	$F(x) + C$
1	x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$-1/x^2$	$1/x$	$\ln\|x\| + C$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$2x$	x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$	$-2/x^3$	$1/x^2$	$-1/x + C$	e^x	e^x	$\mathrm{e}^x + C$
$5x^4$	x^5	$\frac{1}{6}x^6 + C$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	0	c	$cx + C$