

Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie

Lösungen zu Übung 3

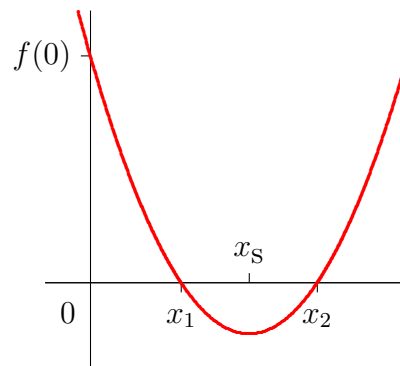
Kegelschnitte

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$

Nach oben offene Parabel mit den Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Die Nullstellen sind bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Genau dazwischen, bei $x_S = 7/2 = 3,5$, liegt der Scheitelpunkt, der in diesem Fall ein Minimum ist (denn die Parabel ist ja nach oben offen). Der Funktionswert am Minimum ist $y_S = f(x_S) = -9/4 = -2,25$.



2. (a) Hyperbelgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

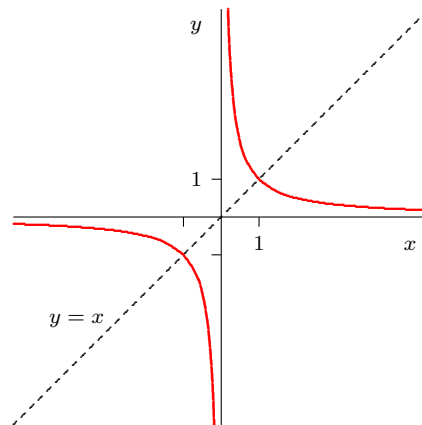
Durchführung der Transformation (Substitution) $x \rightarrow (x+y)/\sqrt{2}$, $y \rightarrow (x-y)/\sqrt{2}$ liefert:

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} - \frac{(x-y)^2}{2b^2} = 1$$

(b) Für $a = b = \sqrt{2}$ ergibt sich daraus:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy = 2 \cdot 2 = 4$$

Die transformierte Gleichung ist $xy = 1$. Dies entspricht der Funktion $f: x \rightarrow y = f(x) = 1/x$ (Normalhyperbel, s. Abb.).



(c) Die zugehörige Umkehrfunktion ist $f^{-1}: y \rightarrow x = f^{-1}(y) = 1/y$. Nach Vertauschen der Variablen x und y erhält man die neue Funktionsgleichung $y = f^{-1}(x) = 1/x$, die jedoch mit der ursprünglichen Funktionsgleichung $y = f(x) = 1/x$ identisch ist (diese Eigenschaft haben alle Funktionen, deren Schaubild zur Geraden $y = x$ spiegelsymmetrisch ist).

3. Umrechnung der Lichtgeschwindigkeit c von der Einheit km/s auf die Einheit km/a:
Berechnung mit dem Taschenrechner:

$$c = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \cdot \frac{365 \text{ d}}{1 \text{ a}} \approx 9,46 \cdot 10^{12} \frac{\text{km}}{\text{a}}$$

Abschätzung ohne Taschenrechner ($8760 = 24 \cdot 365 \approx 25 \cdot 350 = 8750$):

$$\begin{aligned} c &= 300\,000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \frac{\text{km}}{\text{a}} \approx 300\,000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 25 \cdot 350 \frac{\text{km}}{\text{a}} \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^{10} \frac{\text{km}}{\text{a}} = 9,45 \cdot 10^{12} \frac{\text{km}}{\text{a}} \end{aligned}$$

$$(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 27 \cdot 5 \cdot 7 = 135 \cdot 7 = 700 + 210 + 35 = 945)$$

Ein Lichtjahr ($1 \text{ LJ} = c \cdot 1 \text{ a}$) entspricht also etwa 9,5 Billionen Kilometern.