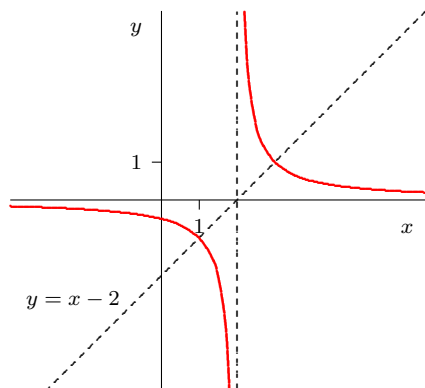


Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie

Lösungen zu Übung 2

Gebrochen-rationale Funktionen

1. Nach rechts verschobene (Normal-)Hyperbel ($y = 1/x$), keine Nullstellen, einfache Polstelle (Polstelle mit VZW) bei $x = 2$.



$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ Achsenschnittpunkt: } f(0) = -\frac{1}{2}.$$

Vorzeichen der Funktionswerte:

$$f(x) < 0 \text{ für } x < 2, f(x) > 0 \text{ für } x > 2.$$

Verhalten in der Umgebung der Polstelle:

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2 \text{ von links,}$$

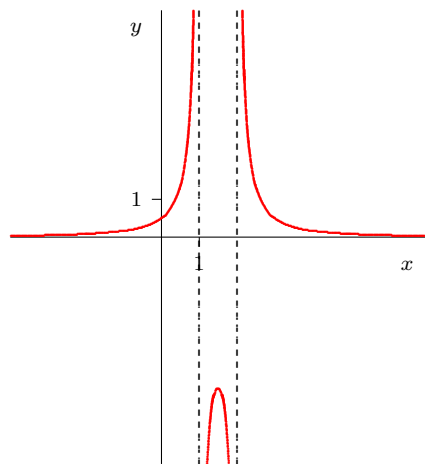
$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 2 \text{ von rechts.}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow -\infty: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ (von unten).}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow +\infty: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (von oben).}$$

$\rightsquigarrow$ Asymptote $y = 0$ (x -Achse)

2. $f(x)$ mit zwei einfachen Polstellen bei $x = 1$ und $x = 2$, keine Nullstellen, Schaubild symmetrisch zur Vertikalen bei $x = \frac{3}{2}$ ($f(\frac{3}{2} - x) = f(\frac{3}{2} + x)$).



$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \text{ Achsenschnittp.: } f(0) = \frac{1}{2}.$$

Vorzeichen der Funktionswerte:

$$f(x) < 0 \text{ für } 1 < x < 2,$$

$$f(x) > 0 \text{ für } x < 1 \text{ oder } x > 2.$$

Verhalten in der Umgebung der Polstellen:

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 1 \text{ von rechts,}$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2 \text{ von links,}$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 1 \text{ von links,}$$

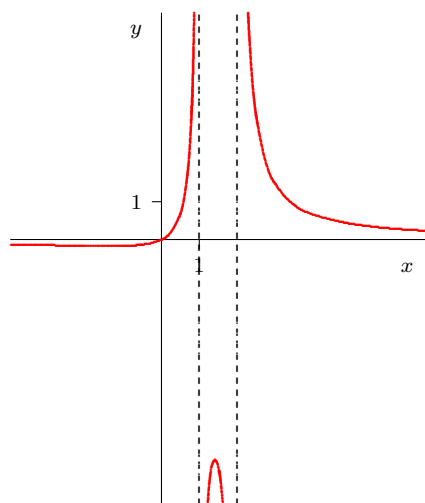
$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 2 \text{ von rechts.}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow -\infty: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ (von oben).}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow +\infty: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (von oben).}$$

$\rightsquigarrow$ Asymptote $y = 0$ (x -Achse)

3. $f(x)$ mit zwei einfachen Polstellen bei $x = 1$ und $x = 2$, einfache Nullstelle bei $x = 0$.



$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}, \text{ Achsenschnittp.: } f(0) = 0.$$

Vorzeichen der Funktionswerte:

$$f(x) < 0 \text{ für } x < 0 \text{ und } 1 < x < 2,$$

$$f(x) > 0 \text{ für } 0 < x < 1 \text{ oder } x > 2.$$

Verhalten in der Umgebung der Polstellen:

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 1 \text{ von rechts,}$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 2 \text{ von links,}$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 1 \text{ von links,}$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 2 \text{ von rechts.}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow -\infty: \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ (von unten).}$$

$$\text{Verhalten für } x \rightarrow +\infty: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (von oben).}$$

$\rightsquigarrow$ Asymptote $y = 0$ (x -Achse)

Proportionalität

1. Bei fester Strecke s ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ **umgekehrt proportional** zur Zeit t : $\bar{v} = s/t$. Oder gleichbedeutend: $t = s/\bar{v}$. Führt eine Geschwindigkeit $\bar{v}_1$ zu einer Reisezeit $t_1 = s/\bar{v}_1 = 1,5$ h, so ergibt sich mit verdoppelter Geschwindigkeit $\bar{v}_2 = 2\bar{v}_1$ eine im Vergleich zu t_1 halbierte Reisezeit $t_2 = s/\bar{v}_2 = s/(2\bar{v}_1) = (1/2)t_1 = 0,75$ h = 45 min.
2. Sieht man von Rabattregelungen ab, dann darf bei Waren angenommen werden, dass das Preisverhältnis $V = B/M$, also das Verhältnis von Geldbetrag B zu Warenmenge M , konstant ist. Damit ist der zu zahlende Betrag B der Warenmenge M **direkt proportional**: $B = V \cdot M$ (das Preisverhältnis V ist der Proportionalitätsfaktor). Aus $B_1/M_1 = V = B_2/M_2$ folgt dann $B_2 = V \cdot M_2 = (B_1/M_1) \cdot M_2 = B_1 \cdot M_2/M_1 = 7 \text{ EUR} \cdot 7 \text{ kg}/3 \text{ kg} = 16,33 \text{ EUR}$.
3. Bei konstantem Druck p sind Volumen V und Temperatur T einer Gasmenge zueinander **direkt proportional** (aus dem idealen Gasgesetz folgt $V = (nR/p) \cdot T$). Also ist das Verhältnis von Volumen V zu Temperatur T konstant, woraus zunächst folgt $V_1/T_1 = V_2/T_2$. Daraus ergibt sich hier $V_2 = (V_1/T_1) \cdot T_2 = V_1 \cdot T_2/T_1 = 3 \text{ L} \cdot 320 \text{ K}/295 \text{ K} = 3,254 \text{ L}$.
4. Bei konstanter Temperatur T sind Volumen V und Druck p einer Gasmenge zueinander **umgekehrt proportional** (aus dem idealen Gasgesetz folgt $p = nRT/V$). Also ist das Produkt von Druck p und Volumen V konstant, woraus zunächst folgt $p_1V_1 = p_2V_2$. Für $V_2 = (2/3) \cdot V_1$ ergibt dies hier $p_2 = p_1V_1/V_2 = (3/2) \cdot p_1 = (3/2) \cdot 1 \text{ atm} = 1,5 \text{ atm}$.
5. Wie bereits festgestellt (siehe 3.) sind Volumen V und Temperatur T einer Gasmenge bei konstantem Druck p zueinander **direkt proportional**. Es ist $V_2 = V_1 \cdot (T_2/T_1) = 75 \text{ L} \cdot 280 \text{ K}/350 \text{ K} = 60 \text{ L}$.
6. Wie bereits festgestellt (siehe 4.) sind Volumen V und Druck p einer Gasmenge bei konstanter Temperatur T zueinander **umgekehrt proportional**. Es ist $p_2 = p_1V_1/V_2 = 1 \text{ atm} \cdot 60 \text{ L}/80 \text{ L} = (3/4) \text{ atm} = 0,75 \text{ atm}$.