**Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie**
**Lösungen zu Übung 1**

1. (a)

$$\begin{array}{rl} 200\ \text{g} & \text{Cr vor der Reaktion} \\ -\ 122\ \text{g} & \text{Cr nach der Reaktion} \\ \hline 78\ \text{g} & \text{Cr im Oxid} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 126\ \text{g} & \text{Masse des Oxids} \\ -\ 78\ \text{g} & \text{Cr im Oxid} \\ \hline 48\ \text{g} & \text{O im Oxid} \end{array}$$

Massenverhältnisse in Bezug auf die jeweiligen relativen Atomgewichte:

$$\text{Cr:}\quad \frac{78\ \text{g}}{52\ \text{g}} = \frac{3}{2} \qquad\qquad \text{O:}\quad \frac{48\ \text{g}}{16\ \text{g}} = 3$$

Atomzahlverhältnis Cr zu O:
$\Rightarrow k : l = (3/2) : 3 = 1 : 2 \Rightarrow$ Reaktionsgleichung: $\mathrm{Cr} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CrO_2}$

Bei dieser Reaktion ist Chrom(IV)oxid ($CrO_2$) entstanden. Dies ist ein braun-schwarzer, ferromagnetischer Feststoff mit Rutil-Struktur, der früher zur Herstellung von Magnetbändern verwendet wurde.

(b)

$$\begin{array}{rl} 200\ \text{g} & \text{Cr vor der Reaktion} \\ -\ 44\ \text{g} & \text{Cr nach der Reaktion} \\ \hline 156\ \text{g} & \text{Cr im Oxid} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 204\ \text{g} & \text{Masse des Oxids} \\ -\ 156\ \text{g} & \text{Cr im Oxid} \\ \hline 48\ \text{g} & \text{O im Oxid} \end{array}$$

Massenverhältnisse in Bezug auf die jeweiligen relativen Atomgewichte:

$$\text{Cr:}\quad \frac{156\ \text{g}}{52\ \text{g}} = 3 \qquad\qquad \text{O:}\quad \frac{48\ \text{g}}{16\ \text{g}} = 3$$

Atomzahlverhältnis Cr zu O:
$\Rightarrow k : l = 3 : 3 = 2 : 2 \Rightarrow$ Reaktionsgleichung: $2\,\mathrm{Cr} + \mathrm{O_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{CrO}$

Bei dieser Reaktion ist Chrom(II)oxid (CrO) entstanden. Dies ist ein schwarzer Feststoff mit Natriumchlorid-Struktur.

(c)

$$\begin{array}{rl} 200\ \text{g} & \text{Cr vor der Reaktion} \\ -\ 44\ \text{g} & \text{Cr nach der Reaktion} \\ \hline 156\ \text{g} & \text{Cr im Oxid} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 228\ \text{g} & \text{Masse des Oxids} \\ -\ 156\ \text{g} & \text{Cr im Oxid} \\ \hline 72\ \text{g} & \text{O im Oxid} \end{array}$$

Massenverhältnisse in Bezug auf die jeweiligen relativen Atomgewichte:

$$\text{Cr:}\quad \frac{156\ \text{g}}{52\ \text{g}} = 3 \qquad\qquad \text{O:}\quad \frac{72\ \text{g}}{16\ \text{g}} = \frac{9}{2}$$

Atomzahlverhältnis Cr zu O:
$\Rightarrow k : l = 3 : (9/2) = 2 : 3 = 4 : 6 \Rightarrow$ Reaktionsgleichung: $4\,\mathrm{Cr} + 3\,\mathrm{O_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{Cr_2O_3}$

Bei dieser Reaktion ist das dunkelgrüne Chrom(III)oxid ($Cr_2O_3$) entstanden.

2. (a) Aus der gegebenen Gleichung wird zunächst $36-12x+x^2+5x-24 = x^2-7x+12 = 0$.

   Die enstandene quadratische Gleichung ist von der Form $x^2+px+q=0$, deren beide Lösungen durch die $pq$-**Formel**

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

   gegeben sind. Anwenden dieser Formel ergibt hier ($p = -7$, $q = 12$):

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

   Die beiden Lösungen der gegebenen quadratischen Gleichung sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = 4$.
   Probe: $(x-x_1)(x-x_2) = (x-3)(x-4) = x^2-7x+12$ ✓.

   (b) $x^2-4x+5=0$.

   Anwenden der $pq$-Formel ergibt hier ($p = -4$, $q = 5$, $\mathrm{i}^2 = -1$):

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm \mathrm{i}$$

   Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind die zueinander konjugiert komplexen Zahlen $x_1 = 2-\mathrm{i}$ und $x_2 = 2+\mathrm{i}$.
   Probe: $[x-(2-\mathrm{i})][x-(2+\mathrm{i})] = x^2-(2+\mathrm{i})x-(2-\mathrm{i})x+(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = x^2-4x+(4-\mathrm{i}^2) = x^2-4x+5$ ✓.

3. (a)

$$1+\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n!} = 1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right) = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = \frac{48}{24}+\frac{12}{24}+\frac{4}{24}+\frac{1}{24} = \frac{65}{24} = 2{,}708\overline{3}$$

   Zum Vergleich: Die Euler-Zahl e ist

$$\mathrm{e} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2{,}718281828\ldots$$

   (b)

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k(k+2) = 2-3+4-5 = -2$$