9. Teil: Integralrechnung

Ausgehend von einer gegebenen differenzierbaren Funktion $f(x)$ gelingt mit den bekannten Ableitungsregeln (s. 7. Teil) die Berechnung sämtlicher Ableitungen $f^{(k)}(x)$ dieser Funktion:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & \dots & & k & & \dots \\ f(x) & \to & f'(x) & \to & f''(x) & \to & \cdots & \to & f^{(k)}(x) & \to & \cdots \end{array}$$

Es wurde auch schon festgestellt, dass nicht nur $f(x)$, sondern alle Funktionen der Schar $f(x)+C$ ($C \in \mathbb{R}$) dieselbe Ableitung $f'(x)$ haben (s. 7. Teil). Das oben gezeigte Schema lässt sich also vervollständigen zu

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & \dots & & k & & \dots \\ f(x)+C & {\color{red}\leftrightarrow} & f'(x) & \to & f''(x) & \to & \cdots & \to & f^{(k)}(x) & \to & \cdots \end{array}$$

Kehren wir zurück zur Betrachtung von $f(x)$ alleine (ohne additive Konstante C). Es stellt sich die Frage, ob der durch einen nach rechts weisenden Pfeil („$\rightarrow$“) angedeutete Vorgang des Differenzierens umgekehrt werden kann, und wenn ja, wie und unter welchen Bedingungen dies möglich ist. Was wäre dann im obigen Schema links von $f(x)$ zu finden?

$$\begin{array}{ccccccccccccc} {\color{red}-1} & & 0 & & 1 & & 2 & & \dots & & k & & \dots \\ {\color{red}??} & {\color{red}\leftrightarrow} & f(x) & \to & f'(x) & \to & f''(x) & \to & \cdots & \to & f^{(k)}(x) & \to & \cdots \end{array}$$

Es wird nun gezeigt, dass die sogenannte unbestimmte Integration die Umkehrung der Differentiation ist, und dass sich folglich durch Umkehrung der bekannten allgemeinen Differentiationsregeln allgemeine Integrationsregeln ergeben.

Stammfunktionen und unbestimmte Integration

Definition: Eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heisst **Stammfunktion zu** $f(x)$. Die Stammfunktionen, die sich voneinander nur um eine additive Konstante C unterscheiden können (s. o.), bilden eine **Funktionenschar**, welche das **unbestimmte Integral von** $f(x)$ genannt wird (ein Integral **ohne** Angabe von Integrationsgrenzen), und man schreibt

$$\int \mathrm{d}x\, f(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)\,.$$

In diesem Zusammenhang heisst $f(x)$ der **Integrand** des unbestimmten Integrals, und die Konstante C heisst **Integrationskonstante**. $\square$

Durch nicht viel mehr als die Einführung eines Namens für ein kurz zuvor noch unbekanntes Objekt (die Stammfunktion) lässt sich das oben gezeigte Schema jetzt vervollständigen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} {\color{red}-1} & & 0 & & 1 & & 2 & & \dots & & k & & \dots \\ {\color{red}F(x)+C} & {\color{red}\leftrightarrow} & f(x) & \to & f'(x) & \to & f''(x) & \to & \cdots & \to & f^{(k)}(x) & \to & \cdots \end{array}$$

Der Beweis dafür, dass Differentiation und unbestimmte Integration ein Paar von zueinander inversen Operationen bilden (ähnlich wie Funktion f und zugehörige Umkehrfunktion f^{-1}, zur Erinnerung: in jedem Intervall strenger Monotonie von f gilt $f(f^{-1}(x)) = x$), erfolgt einfach und direkt:

(1) Unbestimmte Integration von $f(x)$ über x, gefolgt von Differentiation nach x, ergibt stets wieder $f(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int \mathrm{d}x\, {\color{red}f(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(F(x)+C\big) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} + 0 = F'(x) = {\color{red}f(x)}\,,$$

(2) Differentiation der Schar der Stammfunktionen $F(x)+C$ nach x, gefolgt von unbestimmter Integration über x, reproduziert stets die Schar der Stammfunktionen:

$$\int \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(F(x)+C\big)\right) = \int \mathrm{d}x\, f(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C\,.$$

Also lassen sich Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen $f(x)$ aus Tabellen von Ableitungen ablesen, indem die Einträge in diesen Tabellen sozusagen rückwärts herausgelesen werden. Einige Beispiele dazu (unter Verwendung der Tabelle von Ableitungen aus dem 7. Teil):

$$\int x^s\,\mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}+C \qquad (s\neq -1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x^{s+1}}{s+1}+C\right)' = x^s$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (\ln|x|+C)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathrm{e}^x+C)' = \mathrm{e}^x$$

$$\int b^x\,\mathrm{d}x = \frac{b^x}{\ln(b)}+C \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{b^x}{\ln(b)}+C\right)' = b^x$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (\sin(x)+C)' = \cos(x)$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad (-\cos(x)+C)' = \sin(x)$$

Da die Regeln zur Berechnung von Ableitungen einer Funktion von einer reellen Variablen vollständig bekannt sind, kann ein (möglicherweise noch unsicheres oder ungeprüftes) Ergebnis einer unbestimmten Integration stets leicht durch Differentiation überprüft werden. Das bringt auch das folgende Zitat aus einem Mathematikbuch für Pharmazeuten und Mediziner treffend zum Ausdruck:

> „Merke: Wer gut integrieren will, muss gut differenzieren lernen!“[8]

Allgemeine Integrationsregeln für unbestimmte Integrale

Diese entstehen durch Umkehrung der allgemeinen Differentiationsregeln.

(1) Linearität: Das unbestimmte Integral einer „gewichteten Summe von Funktionen“ (fachsprachlich: einer Linearkombination von Funktionen) ist die entsprechend gewichtete Summe der zugehörigen Stammfunktionen (α, β sind Konstanten, $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$):

$$\int (\alpha\, f(x)+\beta\, g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\,F(x)+\beta\,G(x)+C\,.$$

Diese Regel löst auch das Problem, wie die unbestimmte Integration von Summen ($\alpha=\beta=1$) und Differenzen ($\alpha=-\beta=1$) auszuführen ist.

(2) Partielle Integration: Diese Integrationsregel entsteht durch Anwendung der Operation „unbestimmte Integration“ auf die (umgestellte) Produktregel der Differentiation:

$$u'(x)\,v(x) = (u(x)\,v(x))' - u(x)\,v'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

[8] H. Wätzig, W. Mehnert, W. Bühler: Mathematik und Statistik kompakt — Grundlagen und Anwendungen in Pharmazie und Medizin, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 2009, S. 65

Offensichtlich kommt der Name dieser Regel daher, dass einer der beiden Terme auf der rechten Seite weiterhin ein (noch zu lösendes) Integrationsproblem darstellt. Die partielle Integration hilft daher nur dann weiter, wenn dieses verbleibende Integrationsproblem einfacher ist als das zuvor gestellte Integrationsproblem auf der linken Seite des Gleichheitszeichens.

Zwei Beispiele zur partiellen Integration:

$$\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln|x|\,\mathrm{d}x = x\,\ln|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\,\ln|x| - \int \mathrm{d}x = x\,\ln|x| - x + C$$

(falls Sie das Ergebnis anzweifeln, überzeugen Sie sich von $(x\,\ln|x| - x + C)' = \ln|x|$);

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int 1\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-1)\,\mathrm{e}^x + C\,.$$

(3) Integration durch Substitution: Diese Integrationsregel entsteht durch Umkehrung der Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}g}\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f(g(x))\,g'(x) \quad\Leftrightarrow\quad \int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C = F(g(x))+C\,.$$

Zur Integration wurde hier, von links nach rechts gelesen, von einer (alten) Integrationsvariablen x zu einer (neuen) Integrationsvariablen t gewechselt. Dazu wurde die Substitution $t = g(x)$ (mit $\mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x$) verwendet, um das Integral (einfacher) lösbar zu machen (es wurde $F(t)$ als bekannte Stammfunktion zu $f(t)$ angenommen). Zum Schluss wird durch Rücksubstitution wieder zur ursprünglichen Variablen x zurück gewechselt.

Wichtig: Die Variable im Differential des Integrals ($\mathrm{d}x$ oder $\mathrm{d}t$) zeigt unmissverständlich an, über welche Variable jeweils zu integrieren ist. Der Wechsel von alter zu neuer Integrationsvariable muss immer vollständig und in einem Schritt erfolgen. Es dürfen niemals Integrale auftreten, die sowohl die alte als auch die neue Integrationsvariable enthalten.

Zwei Beispiele zur Integration durch Substitution:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left|\begin{array}{l}\text{Substitution:}\\ t = 1+x^2\\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x\end{array}\right| = \int \frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + C$$

(warum darf hier im Endergebnis ausnahmsweise auf die Betragsstriche verzichtet werden?);

$$\int \sin(2x)\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\int \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\text{Substitution:}\\ t = \cos(x)\\ \mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x\end{array}\right| = -2\int t^2\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2}{3}\,t^3 + C = -\frac{2}{3}\cos^3(x) + C$$

(im ersten Schritt wurde die Identität $\sin(2x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$ [s. 4. Teil] verwendet).

Unbestimmte Integration gelingt allgemein immer dadurch, dass die eben genannten allgemeinen Regeln in Kombination mit Eigenschaften des Integranden genutzt werden, um auf sogenannten Grundintegrale (d. h. Integrale der elementaren Funktionen) zu kommen. Dieser Weg kann mitunter lang und mühsam sein (und scheitert manchmal, wenn sich zeigt, dass es einen Weg zu Grundintegralen nicht gibt). Es gibt umfangreiche Tafelwerke, in welchen man Integrale ggf. nachschlagen kann, z. B.

- F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (eds.): *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.

- I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*, 8th edition, Academic Press, 2014.

Wichtiger Hinweis: In Tafelwerken sind unbestimmte Integrale in der Regel ohne die Integrationskonstante C angegeben, da dies Platz spart. Diese Nachlässigkeit entbindet nicht von der Pflicht, bei unbestimmten Integralen nach erfolgreicher Bestimmung einer Stammfunktion diese Konstante stets hinzuzufügen (etwa in einer Klausuraufgabe).

Kleine Übungsaufgabe: Berechnen Sie die unbestimmten Integrale von (1) $f(x) = \tan(x)$ und (2) $f(x) = \cot(x)$. (Hinweis: Nutzen Sie Integration durch Substitution.)

Bemerkenswert: Differentiation und Integration verbinden Funktionen miteinander, die zu Funktionenklassen gehören, welche zuvor als voneinander getrennt betrachtet wurden, z. B.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0,\, x \neq -b/a), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a \neq 0).$$

Hier sind die Integranden einfache gebrochen-rationale Funktionen, die zugehörigen Stammfunktionen dagegen sind transzendente Funktionen.

Unbestimmte Integration gebrochen-rationaler Funktionen

Bei der Suche nach Stammfunktionen von gebrochen-rationalen Funktionen $f(x) = Z_p(x)/N_q(x)$ hilft es oft, den Integranden in eine Summe einfacher(er) Terme umzuformen. Dazu werden die für diese Funktionen bekannten Rechentechniken der Polynomdivision und der Partialbruchzerlegung genutzt. Diese sind analog zu den aus dem Rechnen mit Zahlen bekannten Rechentechniken „Division mit Rest“ ($7 = 3\cdot 2 + 1 \Leftrightarrow (\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ oder $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}))$ und „Zerlegen in einfachere echte Brüche“ ($12 = 3\cdot 4 = 2^2\cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$). Die Stammfunktionen gebrochen-rationaler Funktionen mit linearen oder quadratischen Polynomen im Nenner lassen sich immer mit Hilfe von Logarithmen, inversen Kreis- oder inversen Hyperbelfunktionen angeben (Einzelheiten dazu finden sich z. B. in den oben genannten mathematischen Handbüchern).

Ein Beispiel mit Polynomdivision (*unechte* gebrochen-rationale Funktion als Integrand): Wegen

$$\frac{4x^2+12x+10}{2x+3} = \frac{2x(2x+3)+6x+10}{2x+3} = \frac{2x(2x+3)+3(2x+3)+1}{2x+3} = 2x+3+\frac{1}{2x+3}$$

ist

$$\int \frac{4x^2+12x+10}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int \left(2x+3+\frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x = x^2+3x+\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C\,.$$

Ein Beispiel mit Partialbruchzerlegung (*echte* gebrochen-rationale Funktion als Integrand): Wegen

$$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{6x^2-x+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{D}{x-1} = \frac{(A+B+D)x^2+(-A+D)x+(-B)}{x(x+1)(x-1)}$$

mit $A = 4$, $B = -1$ und $D = 3$ (durch Koeffizientenvergleich oder Punktprobe), ist

$$\int \frac{6x^2-x+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x = 4\ln|x+1| - \ln|x| + 3\ln|x-1| + C\,.$$

Ein Beispiel, das verschiedene Techniken kombiniert: Wegen

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x/2)}{\cosh(x/2)} = \frac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}} = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$$

ist

$$\int \tanh\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\text{Substitution:}\\ t = \mathrm{e}^x\\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{array}\right| = \int \frac{t-1}{t+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2\,\ln|t+1| - \ln|t| + C = 2\,\ln(\mathrm{e}^x + 1) - x + C\,.$$

Setzt man $C' = C + 2\,\ln(2)$, so ist das eben erhaltene Ergebnis gleichwertig zu

$$\int \tanh\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\,\ln\left(\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C'\,.$$

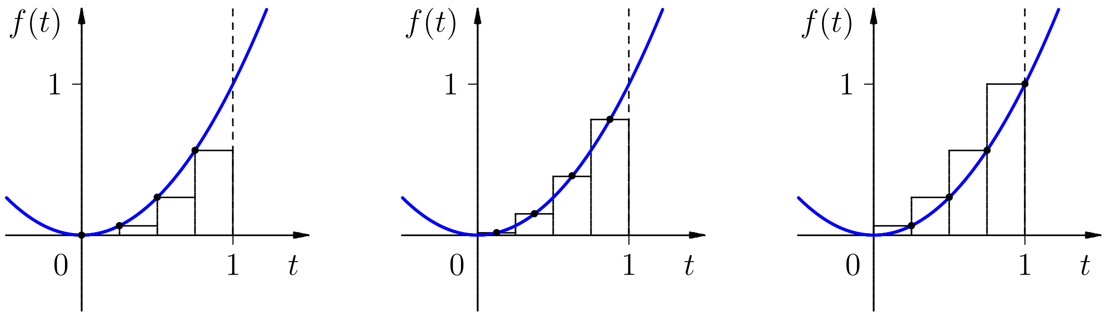
(Verschiedene Stammfunktionen können sich schliesslich nur um eine Konstante unterscheiden).

Bestimmte Integration

Gegeben sei eine in $[a,b]$ stetige reellwertige Funktion $f(t)$. Dann kann das Intervall $[a,b]$ in n gleich grosse Teile der Länge $\Delta t = (b-a)/n$ zerlegt und die folgende Summe gebildet werden:

$$S_n(a,b) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta t = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \qquad (t_{k-1} \le \xi_k \le t_k,\ t_0 = a,\ t_n = b).$$

Derartige Summen sind als Riemann-Darboux-Summen bekannt (nach Bernhard Riemann, 1826–1866, und Gaston Darboux, 1842–1917). Das folgende Schaubild zeigt die Situation beispielhaft für den Fall der Normalparabel ($f(t) = t^2$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$), wobei drei verschiedene Möglichkeiten zur Wahl der Stellen $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ gezeigt sind.



(a) $\xi_k = t_{k-1}$ (ξ_k am linken Intervallrand) (b) $\xi_k = (t_{k-1} + t_k)/2$ (ξ_k in der Intervallmitte) (c) $\xi_k = t_k$ (ξ_k am rechten Intervallrand)

Definition: Sofern der Grenzwert einer Riemann-Darboux-Summe $S_n(a,b)$ zur Funktion $f(t)$ (s. o.) für $n \to \infty$ existiert, heisst dieser Grenzwert das **bestimmte Integral von** $f(t)$ **über** t **von** $t = a$ **bis** $t = b$, und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} S_n(a,b) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Funktion $f(t)$ heisst dann **(riemann-)integrierbar** im Intervall $[a,b]$. □

Anwendung dieser Definition auf die in der obigen Abbildung in (a) bzw. (c) gezeigte Situation[9]: $f(t) = t^2$, $a = t_0 = 0$, $b = t_n = 1$, $\Delta t = (b-a)/n = 1/n$, $t_k = a + k\,\Delta t = k/n$ $(0 \le k \le n)$.
Zu (a): $\xi_k = t_{k-1} = (k-1)/n$ (ξ_k am linken Intervallrand, $1 \le k \le n$),

$$S_n(0,1) = \Delta t \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 2k + 1) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right)$$

[9] Hier werden benötigt die Summen $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{2}{n^3}\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{n^3}n = \frac{1}{6}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} - \frac{n+1}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} S_n(0,1) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 - 0 + 0 = \frac{1}{3}$$

Zu (c): $\xi_k = t_k = k/n$ (ξ_k am rechten Intervallrand, $1 \le k \le n$),

$$S_n(0,1) = \Delta t \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n}$$

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} S_n(0,1) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Diese Beispiele zeigen, dass das Ergebnis der Integration nicht von der konkreten Wahl der Stellen ξ_k in den Teilintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ abhängt. Es hängt auch nicht ab von der Art und Weise der Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle Δt_k ($1 \le k \le n$), sofern nur bei der Bildung des Grenzwertes für $n \to \infty$ gewährleistet ist, dass mit dem Anstieg der Anzahl n der Teilintervalle zugleich deren Grösse abnimmt ($\Delta t_k \to 0$ für alle k).

Kleine Übungsaufgabe: Versuchen Sie, den Fall (b) in der obigen Abbildung nach dem eben für die Fälle (a) und (c) gezeigten Muster zu behandeln. Welches Ergebnis erwarten Sie?

Anmerkung: Als Grundlage zur Berechnung der Riemann-Darboux-Summe, und damit als notwendige Voraussetzung zur Existenz des bestimmten Integrals, wurde Stetigkeit des Integranden $f(t)$ angenommen. Solange die Funktion $f(t)$ im Intervall $[a, b]$ beschränkt bleibt, darf sie sogar endlich viele Sprungstellen in diesem Intervall haben, ohne dass dies die Existenz des bestimmten Integrals beeinträchtigt.

Spezielle Rechenregeln für bestimmte Integrale

Zusammenfassen von Integrationsbereichen oder Zerlegen eines Integrationsbereiches:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (a \le b \le c).$$

Mit $c = a$ folgt daraus:

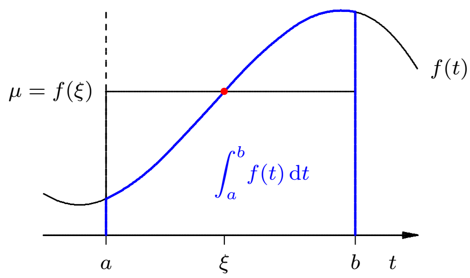
$$(1) \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,, \qquad \text{und} \qquad (2) \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f(t)$ im Intervall $[a, b]$ riemann-integrierbar, so existiert eine reelle Zahl μ mit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mu(b-a)\,.$$

Diese Zahl μ heisst **Mittelwert von $f(t)$ im Intervall** $[a, b]$. Falls $f(t)$ in $[a, b]$ stetig ist, gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$ (s. Abbildung rechts).



Die Verbindung zwischen bestimmter und unbestimmter Integration wird hergestellt durch den

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (oder den **Fundamentalsatz der Analysis**): Sei f eine in $[a, b]$ stetige reellwertige Funktion. Dann ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine für alle $x \in [a, b]$ stetige und für alle $x \in (a, b)$ differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$. Eine solche Funktion heisst Stammfunktion zu $f(x)$, und sie ermöglicht die einfache Berechnung des bestimmten Integrals von $f(t)$ über t von $t = a$ bis $t = b$ als

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Anmerkungen: (1) Die Integrationskonstante C, durch die sich verschiedene Stammfunktionen voneinander unterscheiden, fällt bei der Berechnung eines bestimmten Integrals wegen der Differenzbildung heraus. — **(2)** Der Fundamentalsatz der Analysis wurde, unabhängig voneinander, von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz in der 2. Hälfte des 17. Jhdts. gefunden.

Beispiele zur Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Stammfunktion des Integranden:
(1)

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2\,.$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -(1) + 1 = 0\,,$$

also ist der Mittelwert der Sinusfunktion über eine volle Periode gleich Null!
(3) Volumenarbeit bei isothermer Expansion eines idealen Gases ($pV = nRT$):

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT\big(\ln(V_2) - \ln(V_1)\big) = -nRT\,\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\,.$$

Weil das Gas bei der isothermen Expansion ($V_2 > V_1$) an seiner Umgebung Arbeit verrichtet, nimmt seine Energie (sein Energieinhalt) ab, daher ist $W < 0$.

Wichtig: (1) Das Resultat der Berechnung eines bestimmten Integrals ist eine reelle Zahl (oder der Wert einer physikalischen Grösse $G = \{G\} \cdot [G]$ mit reeller Masszahl $\{G\}$, passend zur gewählten Masseinheit $[G]$). Aus dem Integrationsergebnis kann nicht mehr auf den Integranden zurückgeschlossen werden (so wie man ja auch einer Summe nicht mehr ansieht, welche Summanden zu ihr beitrugen). Zur Erinnerung: Das unbestimmte Integral repräsentiert dagegen eine Funktionenschar! — **(2)** Das Problem der Flächenberechnung führt immer auf ein bestimmtes Integral, aber ein bestimmtes Integral hat keineswegs allgemein die Bedeutung eines Flächeninhalts (s. das zweite Beispiel oben).

Uneigentliche bestimmte Integrale

Wenn bei einem bestimmten Integral der Integrationsbereich und/oder der Integrand unbeschränkt ist, dann nennt man es ein uneigentliches bestimmtes Integral. Dessen Berechnung erfordert eine weitere (zweite) Grenzwertbildung (zusätzlich zur Grenzwertbildung der Riemann-Darboux-Summe). Das soll hier nur an zwei Beispielen gezeigt werden:
(1) Der Integrand strebt an der unteren Integrationsgrenze gegen $+\infty$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2(1-0) = 2\,.$$

(2) Der Integrationsbereich ist unbeschränkt:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}(-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^s = \lim_{s\to\infty}\big(-\mathrm{e}^{-s} + 1\big) = -0 + 1 = 1\,.$$