

4. Teil: Einheitskreis, Bogenmass, Kreisfunktionen

Einheitskreis und Bogenmass

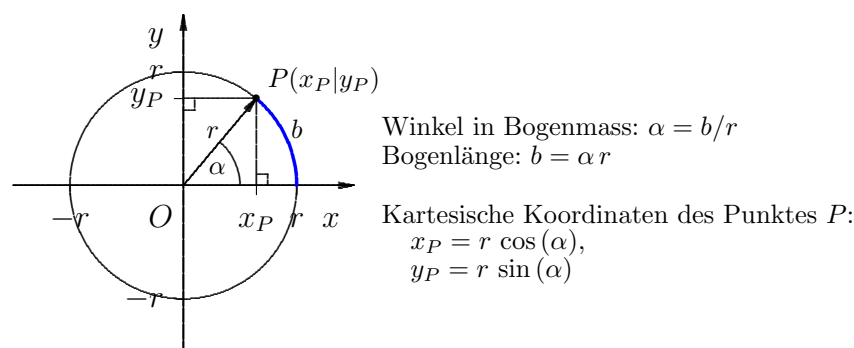
Der Kreis K mit Radius r und Mittelpunkt $M(x_M|y_M)$ in der xy -Ebene, $K(M, r)$, wird beschrieben durch die Kreisgleichung

$$K(M, r) : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Alternativ lässt sich dieser Kreis auch definieren als die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die dieser Kreisgleichung genügen:

$$K(M, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2\}.$$

Ein Kreis mit Radius r hat Durchmesser $d = 2r$, Umfang $U = \pi d = 2\pi r$ und Fläche $A = \pi r^2$. Die folgende Abbildung zeigt den Kreis mit Radius r um den Ursprung O , $K(O, r)$.



Der sogenannte **Einheitskreis** $K(O, 1)$ ist der Kreis mit Radius $r = 1$ um den Ursprung O . Die zugehörige Kreisgleichung ist $x^2 + y^2 = 1$. Liegt der Punkt $P(x_P|y_P)$ auf dem Einheitskreis, so erfüllen seine **kartesischen Koordinaten** dessen Kreisgleichung: $x_P^2 + y_P^2 = 1$.

Statt kartesischer Koordinaten lassen sich aber ebenso gut **ebene Polarkoordinaten** (Kreiskoordinaten) verwenden. Der Abstand des Punktes P vom Ursprung O legt den **Radius** $r = \overline{OP}$ eines Kreises um O fest, auf dem der Punkt P liegt. Die Richtung wird vereinbarungsgemäss durch den **Winkel** α zwischen der Richtung der positiven x -Achse und der Richtung des Strahls von O zu P festgelegt, gemessen gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiver Sinn).

Der Winkel α wird in **Bogenmass** gemessen. Dieses ist definiert als das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b , den die Schenkel des Winkels aus dem Kreis abtrennen, zur Länge des Kreisradius r (s. obige Abb.): $\alpha = b/r$. Das Bogenmass ist dimensionsfrei, also eine reine Zahl (SI-Einheit Radiant, Einheitensymbol $\text{rad} = \text{m/m}$). Dies ist — zumindest für mathematische Zwecke — sehr viel praktischer als die Verwendung von Bogengrad ($^\circ$), Bogenminute ($'$, $1^\circ = 60'$) und Bogensekunde ($''$, $1' = 60''$). Ist $\alpha_B = b/r$ der Winkel in Bogenmass und α_G derselbe Winkel in Bogengrad, so dient die Beziehung $b/U = \alpha_B/(2\pi) = \alpha_G/360^\circ$ zur Umrechnung. Einige häufiger auftretende Winkelwerte (in rad und in $^\circ$) sind im Kopf der folgenden Tabelle zusammengefasst.

α (in rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
α (in $^\circ$)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\cot(\alpha)$	—	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	—	0	—

Kreisfunktionen

Aus den Polarkoordinaten r und α eines Punktes P ergeben sich dessen kartesische Koordinaten mit Hilfe der **Sinus-Funktion** und der **Kosinus-Funktion** des Winkels zu $x_P = r \cos(\alpha)$ und $y_P = r \sin(\alpha)$. Dies sind zwei Beispiele für die Anwendung der sogenannten **Kreisfunktionen** (die auch „trigonometrische Funktionen“ oder einfach „Winkelfunktionen“ heissen). Nach Definition ist in einem rechtwinkligen Dreieck (s. obige Abb.):

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y_P}{r}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x_P}{r}.$$

Zwei weitere Kreisfunktionen, die **Tangens-Funktion** und die **Kotangens-Funktion**, ergeben sich als der Quotient von Sinus-Funktion zu Kosinus-Funktion und als der Kehrwert davon:

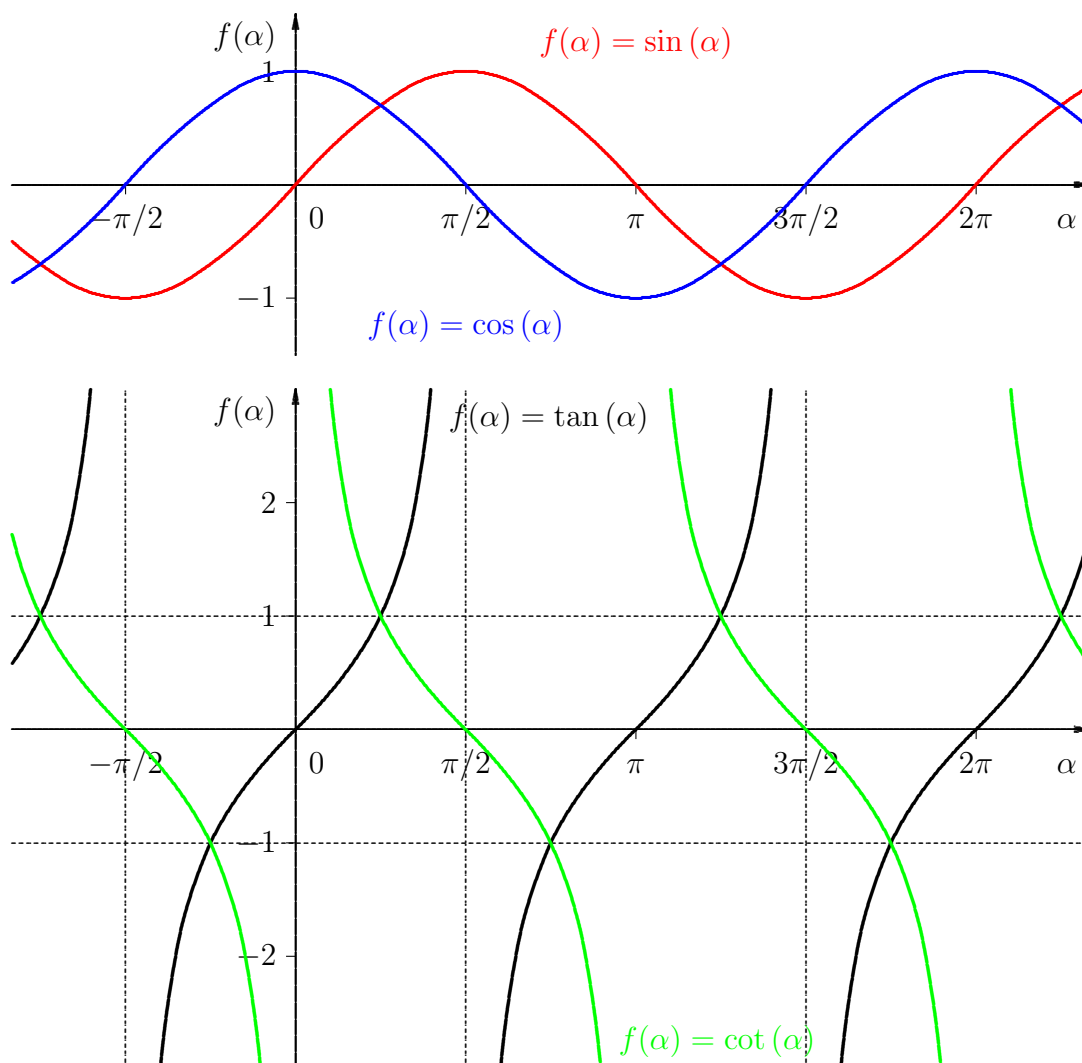
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{y_P}{x_P} \quad (x_P \neq 0), \quad \cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{x_P}{y_P} \quad (y_P \neq 0).$$

Wichtige Beziehungen zwischen den Kreisfunktionen:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (\text{trigonometrische Version des Satzes des Pythagoras}).$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}, \quad \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1.$$

Schaubilder der wichtigsten Kreisfunktionen:



Einige Funktionswerte dieser vier Kreisfunktionen sind in der Tabelle auf der vorletzten Seite angegeben. Die fünf Werte der Sinus- und Kosinusfunktion für häufig(er) auftretende Winkel im ersten Quadranten ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$, eingerahmter Tabellenteil) genügen um, zusammen mit der Periodizität dieser Funktionen (s. unten), Funktionswerte für viele andere (häufiger auftretende) Winkel in den anderen Quadranten ($\pi/2 < \alpha < 2\pi$) zu berechnen.

Nullstellen der Kreisfunktionen (vgl. auch obige Schaubilder):

Sinus-Funktion: $\sin(\alpha) = 0$ für $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

Kosinus-Funktion: $\cos(\alpha) = 0$ für $\alpha = (k + 1/2)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

Tangens-Funktion: $\tan(\alpha) = 0$ für $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

Kotangens-Funktion: $\cot(\alpha) = 0$ für $\alpha = (k + 1/2)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Alle Nullstellen sind Nullstellen mit Vorzeichenwechsel.

Polstellen der Tangens- und Kotangens-Funktionen (vgl. auch obige Schaubilder):

Tangens-Funktion: $|\tan(\alpha)| \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow (k + 1/2)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

Kotangens-Funktion: $|\cot(\alpha)| \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Diese Polstellen sind Definitionslücken der Tangens- bzw. Kotangens-Funktion. Sie liegen genau an den Stellen, an welchen die Sinus- bzw. Kosinus-Funktionen — die im Nenner der Ausdrücke für Tangens- bzw. Kotangens-Funktion auftreten — ihre Nullstellen haben. Alle Polstellen sind daher Polstellen mit Vorzeichenwechsel.

Symmetrie der Kreisfunktionen (vgl. auch obige Schaubilder):

Sinus-, Tangens- und Kotangens-Funktion sind ungerade Funktionen ($f(-x) = -f(x)$),

die Kosinus-Funktion ist eine gerade Funktion ($f(-x) = f(x)$).

Die vier genannten Kreisfunktionen weisen noch eine weitere, neue Art von Symmetrie auf: **Periodizität**, oder: Symmetrie unter Verschiebung. Eine Funktion f heisst **periodisch** mit Periode p ($p > 0$), wenn $f(x + kp) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Alle vier oben genannten Kreisfunktionen sind periodisch. Die Sinus- und die Kosinus-Funktion sind periodisch mit Periode $p = 2\pi$, die Tangens- und die Kotangens-Funktion haben die Periode $p = \pi$.

Additionstheoreme für die Sinus- und die Kosinus-Funktion:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta),$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Daraus ergeben sich mit der Wahl $\beta = \alpha$ die speziellen Formeln für doppelte Winkel:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha),$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

(in der letzten Zeile wurde auch von der Eigenschaft $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ Gebrauch gemacht).

Die Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinus-Funktionen lassen sich elementar geometrisch beweisen, was hier aber aus Platz- und Zeitgründen nicht ausgeführt werden kann, s. (Schul-)Mathematik-Lehrbücher. Viele weitere Formeln dieser Art findet man in Formelsammlungen.