Aufgabe 1. **2+6+2 Punkte**

a) Konstruieren Sie einen stark zusammenhängenden gerichteten Graphen mit 5 Knoten und 5 Bögen.

b) Sei $d_{\min}$ der kleinste Knotengrad in einem ungerichteten Graphen G. Zeigen Sie, dass G mindestens einen Weg mit $d_{\min}$ Kanten enthält.

c) Konstruieren Sie einen azyklischen gerichteten Graphen mit 5 Knoten und 10 Bögen.

Aufgabe 2. **3+7 Punkte**

Max-Branching-Problem Gegeben ist ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ mit Bogengewichten $c(a)$ für alle $a \in A$. Gesucht ist ein Branching $B \subseteq A$ mit maximalem Gewicht.

MAX-Branching-Heuristik (MBH)

Eingabe: gerichteter Graph $D = (V, A)$ mit Kantengewichten $c(a)$ für alle $a \in A$.
Ausgabe: Branching $B \subseteq A$ mit Gewicht $c(B)$.

1. (Sortieren): Ist k die Anzahl der Bögen von D mit positivem Gewicht, so numeriere diese k Bögen, so dass gilt $c(a_1) \geq c(a_2) \geq \ldots \geq c(a_k) > 0$.
2. Setze $B := \emptyset$.
3. FOR $i = 1$ TO k DO:

   $(u, v) = a_i$

   Falls $B \cup \{a_i\}$ keinen Kreis enthält und $\delta^-(v) \leq 1$ für $B \cup \{a_i\}$,
   setze $B := B \cup \{a_i\}$.
4. Gib B aus.

a) Konstruieren Sie ein Beispiel bei dem die MBH nicht die Optimallösung liefert.

b) Ist MBH ϵ-approximativ, d.h. existiert ein $0 < \epsilon \leq 1$, so dass für jedes Problembeispiel I gilt:

$$c_{\text{MBH}}(I) \geq \epsilon c_{\text{opt}}(I) \quad ?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung, indem Sie ein ϵ herleiten oder zeigen, dass kein solches ϵ existiert.

Aufgabe 3. **10 Punkte**

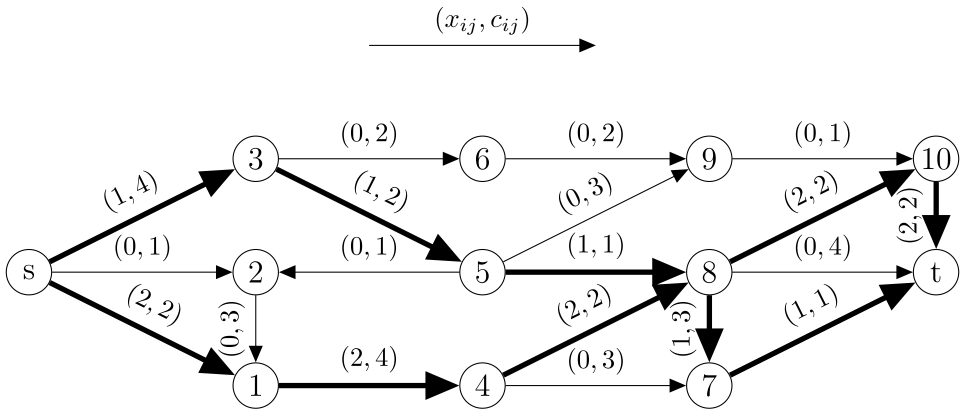
Bin-Packing-Problem Gegeben ist eine Menge rationaler Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ die Indexmenge dieser Zahlen. Gesucht ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das eine Partition von M in k disjunkte Teilmengen $M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} M_k = M$ existiert, mit $\sum_{i \in M_j} a_i \leq 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Partitionsproblem Gegeben ist eine Menge von natürlich Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ die Indexmenge dieser Zahlen. Gibt es eine Teilmenge $S \subseteq M$, die die Bedingung $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \in M \setminus S} a_i$ erfüllt?

Zeigen Sie, dass das Bin-Packing-Problem NP-schwer ist. Nutzen Sie dafür die Tatsache, dass das Partitionsproblems NP-vollständig ist.

Aufgabe 4. **2+3+3+2 Punkte**

Gegeben sei das folgende Flussnetzwerk $N = (V, A, c)$ mit Bogenkapazitäten $c_{ij}, (i,j) \in A$ und einem vorgegebenem (s,t)-Fluss $x_{ij}, (i,j) \in A$.



a) Ist der gegebene (s,t)-Fluss x_{ij} zulässig?

b) Geben Sie, ausgehend vom vorgegebenen (s,t)-Fluss, eine Folge von augmentierenden Wegen an, die zu einem maximalen (s,t)-Fluss führt.

c) Begründen Sie, warum der ermittelte Fluss in Teilaufgabe b) maximal ist.

d) Ist der von Ihnen in b) gefundene maximale (s,t)-Fluss für das gegebene Netzwerk eindeutig?

Aufgabe 5. **10 Punkte**

Ein Schnellrestaurant in der nähe des Olympiastadions bittet Sie, einen Serviceplan für die Spieltage aufzustellen. Es verfügt über k Kellner und muss f Fans bedienen. Die Fans sind soviel mehr, dass wir $f/k \in \mathbb{N}$ annehmen können. Für jeden Gast benötigt man in etwa diesselbe Servicezeit $\sigma > 0$. Die Kellner können ohne Verzögerung direkt den nächsten Gast bedienen. Allerdings sind die Fans unterschiedlich geduldig, je nachdem, ob sie der Siegermannschaft anhängen oder durch vorher konsumierte Speisen und Getränke eher ruhiger oder aggressiver gestimmt sind. Vielleicht spielt auch ihre persönliche Disposition eine Rolle. Jedenfalls drückt sich ihre Ungeduld in dem Schaden aus, den sie an der Einrichtung hinterlassen. Wir können jedem Gast seine persönliche, zeitabhängige (schwach) monotone Funktion als Schädigungswahrscheinlichkeit zuordnen. Ziel ist es, den zu erwartenden Schaden zu minimieren. Sie können davon ausgehen, dass jeder der Gäste von Anfang an bedient werden kann. Modellieren Sie dieses Problem als Minimalkosten-Netzwerkflussproblem.

Aufgabe 6. **5+5 Punkte**

Welches der folgenden durch Gleichungen und Ungleichungen beschriebenen Polyeder ist spitz? Begründen sie jeweils Ihre Entscheidung.

a)

$$\begin{array}{rcrcrcl}
- x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & \geq & 9 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
- 6x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 1 \\
4x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 1 \\
2x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & \leq & -3 \\
x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Aufgabe 7. **2+2+2+2+2 Punkte**

Betrachten Sie das folgende lineare Programm (LP) in Standardform, das durch folgendes Tableau beschrieben ist.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	δ	3	γ	ξ
β	0	1	0	α	1	0	3
2	0	0	1	-2	2	η	-1
3	1	0	0	0	-1	2	1

Das LP ist ein Minimierungsproblem. Die Einträge $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi$ sind unbekannte Parameter. Sei B eine Basis bestehend aus den Spalten x_2, x_3, x_1 (in genau dieser Reihenfolge).

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen für jeden Parameter mindestens einen Wert (oder einen ganzen Wertebereich) an, für welche die Aussage gilt.

a) Phase II des Simplex-Algorithmus kann auf dieses Tableau mit der Startbasis B angewendet werden.

b) Die Basislösung zur Basis B ist zulässig, aber wir haben noch keine optimale Basis.

c) Die momentane Basislösung zu B ist zulässig und die erste Iteration des Simplexalgorithmus zeigt, dass die Zielfunktion unbeschränkt ist.

d) Die Basislösung zu B ist zulässig, x_6 ist Kandidat für den Wechsel in die Basis und wenn x_6 in die Basis kommt, verlässt x_3 die Basis.

e) Die Basislösung ist zulässig und x_7 ist ein Kandidat für den Wechsel in die Basis. Wechselt x_7 in die Basis, bleibt der Zielfunktionswert unverändert.