Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM I - Einführung in die Lineare und
Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 14/15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Benedikt Bodendorf

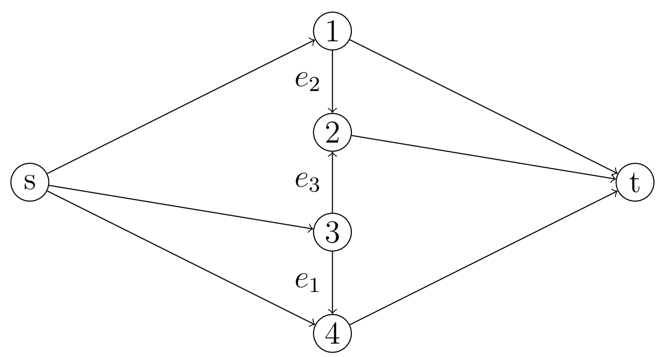
8. Übungsblatt

(MaxFlow, MCF, Netzwerksimplex)
Abgabetermin: 12.12.2014 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 29. **5 Punkte**

Beweist, dass der Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Flusses von Ford-Fulkerson nicht notwendigerweise terminiert, falls irrationale Gewichte zugelassen sind.

Tipp: Betrachtet folgenden Digraphen.



Alle unteren Bogenkapazitäten sind 0. Die oberen Kapazitäten der Bögen e_1, e_2, e_2 sind $c(e_1) = 1, c(e_2) = r, c(e_3) = 1$, wobei $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Alle anderen Bögen haben M, $M \geq 4$, als obere Kapazität. Sei $a_n = r^n$. Es ist einfach zu zeigen, dass $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$ gilt. Zeigt per Induktion über n: *Es gibt eine Folge von 4 augmentierenden Wegen p_1, p_2, p_3, p_4, so dass für die Residualkapazitäten der Bögen e_1, e_2, e_3 gilt:*

$$(a_n, a_{n+1}, 0) \xrightarrow{p_1} (a_{n+2}, 0, a_{n+1}) \xrightarrow{p_2} (a_{n+2}, a_{n+1}, 0) \xrightarrow{p_1} (0, a_{n+3}, a_{n+2}) \xrightarrow{p_3} (a_{n+2}, a_{n+3}, 0).$$

(Die Wege p_1, p_2, p_3, p_4 müssen nicht verschieden sein.)

Aufgabe 30. **5 Punkte**

Sei $\mathcal{I} = (D = (V, A), c, b, l, u)$ eine Instanz eines Minimalkosten-Flussbroblems mit $l_a < u_a$ für alle $a \in A$ (c Kosten, b Bedarfe, l untere Schranken, u obere Schranken). Wir definieren den „Nettobedarf“ $\tilde{b}(i)$ für Knoten in V als

$$\tilde{b}_i := b_i + l(\delta^+(i)) - l(\delta^-(i)), \qquad (1)$$

Wir setzen

$$V^+ := \{i \in V \mid \tilde{b}_i < 0\},$$
$$V^- := \{i \in V \mid \tilde{b}_i \geq 0\}.$$

Der Digraph $D' = (V', A')$ enthält einen zusätzlichen Knoten k mit Bedarf $b'_k = 0$ sowie einen Bogen (k, i) für jeden Knoten $i \in V^-$ und einen Bogen (i, k) für jeden Knoten $i \in V^+$. Die Kosten für diese zusätzlichen Bögen werden so hoch gesetzt, dass sie in keiner Optimallösung für $\mathcal{I}'$ gewählt werden, falls $\mathcal{I}$ zulässig ist, also z.B.

$$M := 1 + \frac{1}{2}|V| \max\{|c_a| \mid a \in A\}.$$

Die erweiterte Instanz $\mathcal{I}' = (D' = (V', A'), c', b', l', u')$ ist dann gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
V' &:= V \cup \{k\} \\
A' &:= A \cup \{(k,i) \mid i \in V^-\} \cup \{(i,k) \mid i \in V^+\} \\
c'_a &:= \begin{cases} c_a & a \in A \\ M & a \in A' \setminus A \end{cases} \\
b'_i &:= \begin{cases} b_i & i \in V \\ 0 & i \in V' \setminus V \end{cases} \\
l'_a &:= \begin{cases} l_a & a \in A \\ 0 & a \in A' \setminus A \end{cases} \\
u'_a &:= \begin{cases} u_a & a \in A \\ \infty & a \in A' \setminus A \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zeigt, dass gilt:

(a) Es existiert eine zulässige Lösung für $\mathcal{I}'$. Genauer: Es bilden

$$T := A' \setminus A, \quad L := A, \quad U := \emptyset$$

und der durch T definierte Fluss x eine zulässige Baum-Lösung von $\mathcal{I}'$.

(b) Gilt in einer Optimallösung x von $\mathcal{I}'$ $x_a > 0$ für einen Bogen $a \in A' \setminus A$, so existiert kein zulässiger Fluss für $\mathcal{I}$.

(c) Ist x ein optimaler zulässiger Fluss für $\mathcal{I}'$ mit $x_a = 0$ für $a \in A' \setminus A$, so ist x eingeschränkt auf A ein optimaler zulässiger Fluss für $\mathcal{I}$.

Aufgabe 31. **5 Punkte**

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ mit Bogengewichten c_a für jeden Bogen $a \in A$. Betrachtet das Kürzeste-Wege-Baum-Problem für einen Startknoten $s \in V$. Dies kann wie folgt als Minimalkosten-Flussproblem formuliert werden.

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{a \in A} c_a x_a & \\
\sum_{a \in \delta^-(s)} x_a - \sum_{a \in \delta^+(s)} x_a &= 1 - |V| \\
\sum_{a \in \delta^-(u)} x_a - \sum_{a \in \delta^+(u)} x_a &= 1 \qquad \forall u \in V \setminus \{s\} \\
x_a &\geq 0 \qquad \forall a \in A
\end{aligned}
$$

a) Zeigt, dass alle Bögen von Bäumen im Netzwerk-Simplex-Algorithmus von der Wurzel s weg zeigen.

b) Wie können negative Kreise vom Netzwerk-Simplex-Algorithmus erkannt werden.

c) Angenommen $c_a \geq 0$ für alle $a \in A$ und die „entering-arc“ wird immer so gewählt, dass sie die geringsten reduzierten Kosten unter alle Nicht-Baum-Bögen hat. Zeigt, dass nach der k-ten Iteration, die Baumlösung dem Kürzesten-Wege-Baum von Knoten s zu den k dichtesten Knoten und den künstlichen Bögen (s, i) zu den restlichen Knoten entspricht. Zeigt, das der Netzwerksimplex in dieser Situation dem Dijkstra-Algorithmus entspricht.

Aufgabe 32. **5 Punkte**

Nachdem Nepomuk mit eurer Hilfe die Auslieferung der Geschenke gesichert hat, geht es nun um die Herstellung der noch fehlenden Geschenke. In einer Spielzeugmanufaktur für Puppen sind einige Wichtel krank geworden, so dass der Produktionsplan nicht, wie vorgesehen, umgesetzt werden kann. Nun ist es an Nepomuk und euch, die Situation noch zu retten. Es gibt eine Menge von Geschenken G und eine Menge von verfügbaren Wichteln W. Die Arbeitsschritte bei der Herstellung der verschiedene Puppen ist ähnlich. Es kann also angenommen werden, dass jeder Wichtel für ein Geschenk $g \in G$, p Zeiteinheiten benötigt. Für jedes Geschenk $g \in G$ gibt es eine Deadline, wann es fertig sein muss. Es kann angenommen werden, dass $\frac{|G|}{|W|} \in \mathbb{Z}$. Für jedes Geschenk ist eine monoton steigende Kostenfunktion $c_g(t_g)$ definiert, welche die Kosten angibt, die entstehen, wenn Geschenk g zum Zeitpunkt t_g fertiggestellt ist. Eine Fertigstellung nach der Deadline wird damit über die Kostenfunktion bestraft.

Die Wichtel sollen nun so verteilt werden, dass $\sum_{g \in G} c_g(t_g)$ minimal wird. Formuliert das Problem als Minimalkosten-Flussproblem.

Fragen: klug@zib.de