Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 14/15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Benedikt Bodendorf

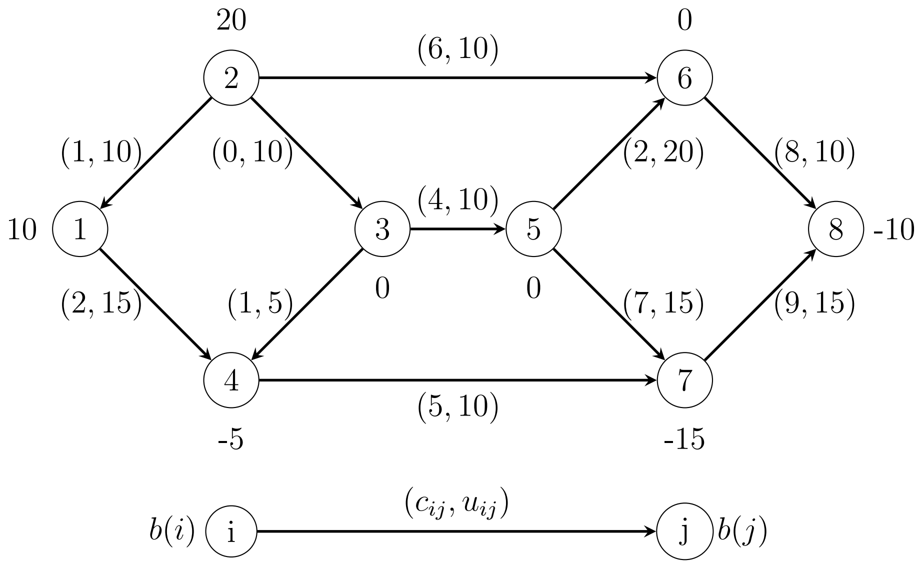
7. Übungsblatt

(Letztes Übungsblatt der ersten Vorlesungshälfte.)

Abgabetermin: 5.12.2014 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 25. — 5 Punkte

Gegeben sei das folgende Netzwerk. Das Angebot und die Nachfrage steht an den Knoten. Die unteren Kapazitäten sind für alle Bögen gleich 0 und an jedem Bogen ij stehen die Kosten c_{ij} und die obere Kapazität u_{ij}.



Löst das gegebene Minimalkosten-Flussproblem mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. Gebt dazu die Abfolge der augmentierenden Netzwerke, sowie der augmentierenden Kreise und Wege an.

Aufgabe 26. — 5 Punkte

Ein Produzent von Schokoladenweihnachtsmännern hat mehrere Fabriken und Zwischenlager, die als Verteilungszentren für die Belieferung der Supermärkte dienen. Sei S die Menge der Supermärkte, F die Menge der Fabriken und Z die Menge der Zwischenlager. Ausgeliefert wird immer über ein Zwischenlager und nie direkt von der Fabrik zum Supermarkt. Hierbei werden von den Fabriken und von den Zwischenlagern immer nur ganze LKW-Ladungen verschickt. Für jede Fabrik $f \in F$

ist die Produktionsmenge $a_f \in \mathbb{Z}^+$ und für jeden Supermarkt $s \in S$ die angefragte Menge $b_s \in \mathbb{Z}^+$ bekannt. Die Produktions- und Nachfragemengen sind in ganzen LKW-Ladungen angegeben. Von zwei Speditionen wurden Angebote eingeholt. Dies beinhaltet für jede Verbindung Fabrik $\rightarrow$ Lager und Lager $\rightarrow$ Supermarkt die Anzahl der LKW-Ladungen, die maximal transportiert werden können und die Kosten pro LKW-Ladung. Aus diesen Angeboten sollen jetzt Verbindungen bestimmt werden, so dass die Nachfrage der Supermärkte erfüllt wird und die Kosten minimal sind. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Produktionsmenge nicht kleiner als die Nachfrage ist.

Modelliert dies als Minimalkosten-Flussproblem.

Aufgabe 27. **5 Punkte**

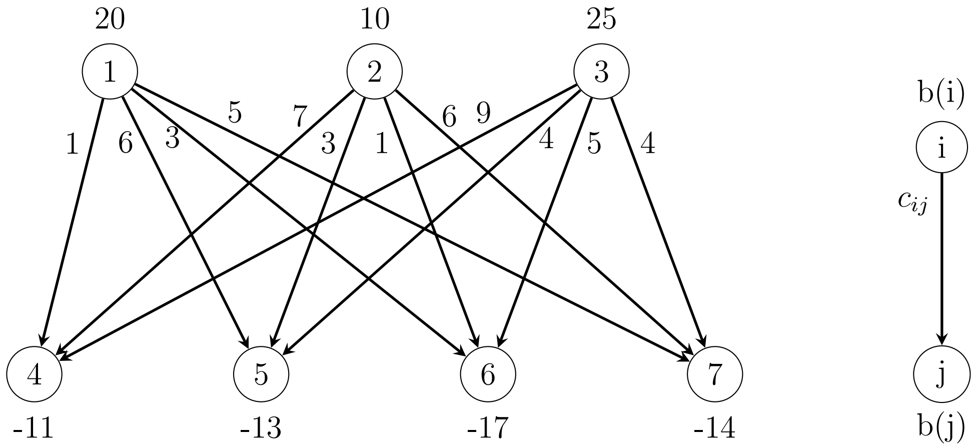
Da die Bevölkerung in den letzten 200 Jahren stark zugenommen hat, schafft es der Weihnachtsmann nicht mehr alle Geschenke selber unter den Weihnachtsbaum zu legen. Seit geraumer Zeit gibt es deshalb eine ganze Menge Wichtel, die ihm dabei helfen. In den letzten Jahren war dies jedoch immer ein ganz schönes Chaos. Deshalb hat der Weihnachtsmann dem Wichtel Nepomuk die Aufgabe gegeben einen genauen Plan aufzustellen, wie die Geschenke am besten verteilt werden.

Es gibt mehrere geheime Lager rund um den Globus, von denen aus die Geschenke auf Schlitten am Heilligen Abend verteilt werden. Die Schlitten starten von 0 Uhr bis 23 Uhr (GMT) immer zur vollen Stunde von einem Lager. In einem ersten Schritt hat Nepomuk schon Flugroute für die Schlitten bestimmt, so dass jedes Geschenk sein Ziel rechtzeitig erreicht. Eine Flugroute besteht aus einem Startort, einer Startzeit, einem Endziel und einer geplanten Ankunftszeit am Endziel. Das Endziel wird nach dem Ausliefern aller Geschenke angeflogen und ist ein Lager, aber nicht unbedingt das Lager, von dem der Schlitten gestartet ist. Für die Ausführung einer Flugroute werden 2 Wichtel benötigt. Sobald sie eine Flugroute abgearbeitet haben, stehen sie direkt für den nächsten Flug zur Verfügung. Für jedes Geschenkelager weiß Nepomuk die Anzahl, der um 0 Uhr verfügbaren, Wichtel (gerade Anzahl). Zwischen den Geschenkelagern gibt es auch einen Shuttleverkehr, so dass Wichtel innerhalb einer Stunde in ein anderes Lager wechseln können, ohne eine Flugroute abzuarbeiten.

Was Nepomuk jetzt noch Kopfzerbrechen bereitet, ist ob alle Flugrouten mit den vorhandenen Wichteln durchführbar sind. Helft Nepomuk bei der Modellierung des Problems und empfehlt ihm einen passenden Algorithmus.

Aufgabe 28. **5 Punkte**

Betrachtet das folgende Beispiel. Alle oberen Bogenkapazitäten sind unendlich und alle unteren Bogenkapazitäten sind 0. Die Kosten stehen jeweils am Bogen und die Werte für Nachfrage und Angebot stehen unter beziehungsweise über den Knoten.



a) Sei x ein Fluss mit $x_{14} = 11, x_{16} = 9, x_{25} = 2, x_{26} = 8, x_{35} = 11, x_{37} = 14$ und alle anderen Bögen gleich 0. Zeigt, dass x ein optimaler Fluss ist. Was sind die Kosten des Flusses?

b) Gebt ein Beispiel für das so genannte More-for-less-Paradoxon an, indem ihr die Bedarfe so verändert, dass die entstehende Instanz des Minimalkosten-Flussproblems, einen Fluss mit in Summe größerem Flusswert erlaubt, der geringere Kosten verursacht.

Fragen: klug@zib.de