Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 14/15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Benedikt Bodendorf

6. Übungsblatt

(Maximale Flüsse)

Abgabetermin: 28.11.2014 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 20. 5 Punkte

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Bogenkapazitäten $c_a, a \in A$, sowie $s, t \in V$ zwei unterschiedliche Knoten. Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller gerichteten (s,t)-Wege in D und $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteten Kreise. Sei $x \in \mathbb{R}^A$ mit $0 \leq x_a \leq c_a$ für $a \in A$.

Zeigt: x ist ein zulässiger (s,t)-Fluss genau dann, wenn es Wege $P_1, P_2, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$ und Kreise $C_1, C_2, \ldots, C_l$ sowie Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l \geq 0$ gibt mit

$$x_{uv} = \sum_{i \in \{j | uv \ni P_j\}} \lambda_i + \sum_{i \in \{j | uv \ni C_j\}} \mu_i$$

Aufgabe 21. 5 Punkte

Gegeben sei das Netzwerk $N = (D, c, s, t)$ mit einem Digraph $D = (V, A)$, Bogenkapazitäten $c_a \geq 0, a \in A$, Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V$. Es wird angenommen, dass zu jedem Bogen $uv \in A$ auch immer der Bogen $vu \in A$ existiert. Dies ist keine Einschränkung, da als Bogenkapazität auch 0 gewählt werde kann.

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch. Gebt jeweils ein Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $x_{uv}, uv \in A$ ein maximaler (s,t)-Fluss. Für jeden Bogen $uv \in A$ gilt entweder $x_{uv} = 0$ oder $x_{vu} = 0$ (oder beides).

b) Jedes Netzwerk hat einen maximalen (s,t)-Fluss bei dem für jeden Bogen $uv \in A$ entweder $x_{uv} = 0$ oder $x_{vu} = 0$ (oder beides) gilt.

c) Haben alle Bögen unterschiedliche Kapazitäten, dann hat das Netzwerk einen eindeutigen minimalen (s,t)-Schnitt.

d) Wenn alle Kapazitäten mit einer positiven Zahl λ multipliziert werden, verändert sich der minimale (s,t)-Schnitt nicht.

e) Wenn zu alle Kapazitäten eine positive Zahl λ addiert wird, bleibt der minimale (s,t)-Schnitt unverändert.

Aufgabe 22. **5 Punkte**

Seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ zwei minimale (s,t)-Schnitte in einem Netzwerk. Zeigt, dass $\delta^+(X \cup Y)$ und $\delta^+(X \cap Y)$ auch minimale (s,t)-Schnitte sind.

Aufgabe 23. **5 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph mit Bipartition V_1, V_2. Wir definieren einen Digraphen $D = (W, A)$ wie folgt. Wir wählen zwei neue Knoten, sagen wir s und t, und setzen $W := V \cup \{s, t\}$. Die Bögen von D seien die folgenden. Ist $e = uv \in E$ eine Kante von G, so geben wir dieser die Richtung von V_1 nach V_2. Ist also $u \in V_1$ und $v \in V_2$, so wird aus $uv \in E$ der Bogen (u, v) andernfalls der Bogen (v, u). Ferner enthält D die Bögen (s, u) für alle $u \in V_1$ und die Bögen (v, t) für alle $v \in V_2$. Alle Bögen von D erhalten die Kapazität 1.

Zeigt: Der Wert eines maximalen zulässigen (s,t)-Flusses x in D ist gleich dem Wert eines kardinalitätsmaximalen Matchings in G. Ein kardinalitätsmaximales Matching M kann direkt aus x konstruiert werden.

Fragen: klug@zib.de