

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel  
Dr. Axel Werner  
Torsten Klug  
Benedikt Bodendorf

## 5. Übungsblatt

(kürzeste Wege)

Abgabetermin: 21.11.2014 bis 14:15 in MA041

### Aufgabe 17.

5 Punkte

Sei  $T$  ein Baum auf  $n$  Knoten, welche mit  $1, \dots, n$  bezeichnet sind. Sei  $D = (d_{ij})$  die Distanzmatrix von  $T$ , d.h.  $d_{ij}$  ist die Anzahl der Kanten auf dem Weg von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  in  $T$ . Beweist, dass  $\det(D) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$  gilt. Bemerkenswert ist, dass dies nur von  $n$  abhängt.

### Aufgabe 18.

5 Punkte

Für ein Nahverkehrsunternehmen soll der Dienstplan für eine Buslinie erstellt werden. Die Linie verkehrt von 9-17 Uhr und muss in dieser Zeit immer von mindestens einem Fahren besetzt sein. Die gegebene Tabelle enthält die verfügbaren Dienstzeiten der Fahren und die entsprechenden Kosten. Gesucht ist ein kostenminimaler Dienstplan, der alle genannten Anforderungen erfüllt. Modelliert die Fragestellung als Kürzestes-Wege-Problem und löst es mit einem Kürzesten-Wege-Algorithmus eurer Wahl.

Dienstzeiten	9-13	9-11	12-15	12-17	14-17	13-16	15-17
Kosten	30	18	21	38	20	22	9

### Aufgabe 19.

5 Punkte

Sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph mit Gewichten  $c_a \in \mathbb{R}$ ,  $c_a \geq 0$  für jeden Bogen  $a \in A$ . Sei  $s \in V$ . Zeigt:  $T$  ist ein Kürzester-Wege-Baum von  $s$  genau dann, wenn  $d_T(s, u) + c(u, v) \geq d_T(s, v)$  für jeden Bogen  $(u, v) \in A$  der nicht in  $T$  enthalten ist gilt; dabei ist  $d_T(s, u)$  die Distanz bezüglich  $c$  in  $T$ .

**Aufgabe 20.****5 Punkte**

Gegeben sei ein Digraph  $G = (V, A)$  mit Gewichten  $c_a \in \mathbb{Q}, a \in A$  sowie eine Funktion  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  für die gilt:  $f(u, w) \leq \text{dist}(u, w)$ , wobei  $\text{dist}(x, y)$  die Länge eines kürzesten Weges zwischen  $x \in V$  und  $y \in V$  ist. Des Weiteren erfüllt  $f$  folgende Dreiecksungleichung  $c(v, w) + f(w, t) \geq f(v, t)$

Verändert die Kantenlänge zu  $c'(v, w) = c(v, w) - f(v, t) + f(w, t)$  und wendet nun einen passenden Kürzeste-Wege-Algorithmus an.

- a) Beweist, dass die kürzesten Wege sich durch die neuen Kantenlänge nicht verändert haben.
- b) Beschreibt kurz und präzise, bei welchem Kürzesten-Wege-Algorithmus dieses Verfahren von Vorteil sein kann und worin dieser Vorteil besteht.