Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 14/15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Benedikt Bodendorf

13. Übungsblatt

Abgabetermin: 30.01.2015 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 49. **6 Punkte**

Beweist folgende Alternativsätze:

Für dimensionsverträgliche Matrizen A, C, D und Vektoren x, y, c, u, v, w gilt:

a) $(\exists x \mid Ax = c) \quad \dot\vee \quad (\exists y \mid y^T A = 0, c^T y = 1)$

b) $(\exists x \mid Ax < c)$

$$\dot\vee \quad \left[\exists y \mid (A^T y = 0, c^T y = -1, y \geq 0) \vee (A^T y = 0, c^T y \leq 0, y > 0)\right]$$

c) $(\exists x \mid Ax > 0, Cx \geq 0, Dx = 0)$

$$\dot\vee \quad (\exists u, v, w \mid u, v \geq 0, u \neq 0, A^T u + C^T v + D^T w = 0)$$

d) $(\exists x : Ax \leq 0, x \neq 0) \quad \dot\vee \quad (\forall c \mid \exists y \mid y^T A = c, y \geq 0)$

Aufgabe 50. **5 Punkte**

Ist der Punkt $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung des folgenden LPs?

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
& x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Beantwortet die Frage mit Hilfe der Bedingungen vom komplementären Schlupf.

Aufgabe 51. **4 Punkte**

Was ist an der folgenden Argumentation falsch?

Es gilt durch abwechselnde Anwendung von Dualität bzw. der Abschätzung $\min\{f(x) \mid x \in X\} \leq \max\{f(x) \mid x \in X\}$:

$$\begin{aligned}
\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min\{y^T b \mid y^T A \geq c^T, y \geq 0\} \\
&\leq \max\{y^T b \mid y^T A \geq c^T, y \geq 0\} \\
&\leq \min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \leq 0\} \\
&\leq \max\{c^T x \mid Ax \geq b, x \leq 0\} \\
&\leq \min\{y^T b \mid y^T A \leq c^T, y \leq 0\} \\
&\leq \max\{y^T b \mid y^T A \leq c^T, y \leq 0\} \\
&\leq \min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \\
&\leq \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert bzw. minimiert.

2. Programmieraufgabe

Abgabetermin: 30.1.2015

Programmiert das Verfahren von Fourier-Motzkin zur Elimination von Variablen in einem Ungleichungssystem in der Form $Ax \leq b$. Das Programm soll sukzessive eine durch eine Liste gegebene Teilmenge der Variablen eliminieren und die hierbei entstehenden Ungleichungssysteme ausgeben. Versucht, diese Systeme zu reduzieren (Entfernung doppelter oder offensichtlich redundanter Ungleichungen).

Eingabeformat Die erste Zeile besteht aus einer Liste von Variablenindizes. Die darauf folgenden Zeilen beschreiben die Koeffizientenmatrix, wobei das letzte Element immer der entsprechend Eintrag von b ist. Zwei Elemente sind jeweils durch Leerzeichen getrennt.

Beispiel

```
1 2
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
```

Die resultierenden Ungleichungen sind:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\
5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & \leq & 8 \\
9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & \leq & 12
\end{array}$$

Eliminiert werden sollen die Variable 1 und 2 (1 und 2 Spalte), wobei die gegebene Reihenfolge eingehalten werden soll.

Problembeispiele Testet eurer Programm mit den Problembeispielen, die auf der Website zur Vorlesung bereit gestellt werden (online am Montag 26.1). Nutzt zum Debuggen die Beispiel aus der Vorlesung.

Abgabe Schickt euren Quellcode bis Freitag, den 30.1.2015 an `klug@zib.de`. Schreibt in die E-Mail für jedes Problembeispiel die Anzahl der am Ende erhaltenen Ungleichung.

Fragen: klug@zib.de