

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel  
Dr. Benjamin Hiller

## Übungsblatt 9

Abgabetermin: 20.12.2012 bis 16:15 in MA043

### Aufgabe 32.

5 Punkte

Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph mit Kapazitäten  $u : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  und sei  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\sum_{v \in v} b(v) = 0$ . Zeigt, dass ein  $b$ -Fluss genau dann existiert, wenn

$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \quad \forall X \subseteq V.$$

### Aufgabe 33.

5 Punkte

Sei  $\mathcal{I} = (D, u, b, c)$  eine Instanz für das Minimalkosten-Flussproblem und es seien auch unendliche Kapazitäten erlaubt, d.h.  $u(a) = \infty$  für einige Bögen  $a$ . Die Instanz  $\mathcal{I}$  heißt unbeschränkt, falls  $c(f)$  unbeschränkt über der Menge aller  $b$ -Flüsse zu  $\mathcal{I}$  ist.

- Beweist, dass  $\mathcal{I}$  unbeschränkt ist genau dann, wenn  $I$  zulässig ist und es einen negativen Zykel (bzgl.  $c$ ) gibt, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.
- Zeigt, dass man in  $O(n^3)$  Zeit entscheiden kann, ob  $\mathcal{I}$  unbeschränkt ist.
- Zeige, dass und wie man unendliche Kapazitäten durch endliche Kapazitäten ersetzen kann, falls das Problem beschränkt ist.

### Aufgabe 34.

5 Punkte

Sei  $\mathcal{I} = (D = (V, A), c, b, l, u)$  eine Instanz eines Minimalkosten-Flussproblems ( $c$  Kosten,  $b$  Bedarfe,  $l$  untere Schranken,  $u$  obere Schranken). Wir definieren den „Nettobedarf“  $\tilde{b}(i)$  für Knoten in  $V$  als

$$\tilde{b}_i := b_i + l(\delta^+(i)) - l(\delta^-(i)), \quad (1)$$

Wir setzen

$$V^+ := \{i \in V \mid \tilde{b}_i \geq 0\},$$

$$V^- := \{i \in V \mid \tilde{b}_i < 0\}.$$

Der Digraph  $D' = (V', A')$  enthält einen zusätzlichen Knoten  $k$  mit Bedarf  $b'_k = 0$  sowie einen Bogen  $(k, i)$  für jeden Knoten  $i \in V^-$  und einen Bogen  $(i, k)$  für jeden

Knoten  $i \in V^+$ . Die Kosten für diese zusätzlichen Bögen werden so hoch gesetzt, dass sie in keiner Optimallösung für  $\mathcal{I}'$  gewählt werden, falls  $\mathcal{I}$  zulässig ist, also z.B.

$$M := 1 + \frac{1}{2}|V| \max\{c_a \mid a \in A\}.$$

Die erweiterte Instanz  $\mathcal{I}' = (D' = (V', A'), c', b', l', u')$  ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} V' &:= V \cup \{k\} \\ A' &:= A \cup \{(k, i) \mid i \in V^-\} \cup \{(i, k) \mid i \in V^+\} \\ c'_a &:= \begin{cases} c_a & a \in A \\ M & a \in A' \setminus A \end{cases} \\ b'_i &:= \begin{cases} b_i & i \in V \\ 0 & i \in V' \setminus V \end{cases} \\ l'_a &:= \begin{cases} l_a & a \in A \\ 0 & a \in A' \setminus A \end{cases} \\ u'_a &:= \begin{cases} u_a & a \in A \\ \tilde{b}_i + 1 & a \in A' \setminus A, (a = (i, k) \text{ oder } (k, i)) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Es gilt:

- (a) Es existiert eine zulässige Lösung für  $\mathcal{I}'$ . Genauer bilden

$$T := A' \setminus A, \quad L := A, \quad U := \emptyset$$

und der durch  $T$  definierte Fluss  $x$  eine zulässige Baum-Lösung von  $\mathcal{I}'$  (siehe Vorlesung 7.16).

- (b) Gilt in einer Optimallösung  $x$  von  $\mathcal{I}'$   $x_a > 0$  für einen Bogen  $a \in A' \setminus A$ , so existiert kein zulässiger Fluss für  $\mathcal{I}$ .
- (c) Ist  $x$  ein optimaler zulässiger Fluss für  $\mathcal{I}'$  mit  $x_a = 0$  für  $a \in A' \setminus A$ , so ist  $x$  eingeschränkt auf  $A$  ein optimaler zulässiger Fluss für  $\mathcal{I}$ .

### Aufgabe 35.

**5 Punkte**

Formuliert folgendes Problem als Minimalkosten-Flussproblem: Es seien  $n$  Aufträge (Jobs) auf  $m$  Maschinen zu verteilen, so dass sie auf jeder Maschine unterbrechungsfrei und hintereinander bearbeitet werden. Sei  $J$  die Menge der Jobs, und der Einfachheit wegen sei  $n/m \in \mathbb{Z}$ . Jeder Job hat eine Bearbeitungszeit von  $p$  Zeiteinheiten. Für jeden Job  $j$  sei außerdem eine monoton steigende Kostenfunktion  $c_j(t_j)$  definiert, welche die Kosten angibt, die entstehen, wenn Job  $j$  zum Zeitpunkt  $t_j$  abgeschlossen wurde. (Ein einfaches Beispiel ist, wenn Fertigstellungstermine (deadlines) einzuhalten sind und Kosten entstehen, sobald ein Auftrag später als sein zugehöriger Termin fertig wird.) Die Aufgabe besteht darin, die Jobs so auf die Maschinen zu verteilen, dass  $\sum_{j \in J} c_j(t_j)$  minimal wird, wobei  $t_j$  der Fertigstellungszeitpunkt von Job  $j$  ist.

**Fragen:** klug@zib.de