TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 12/13

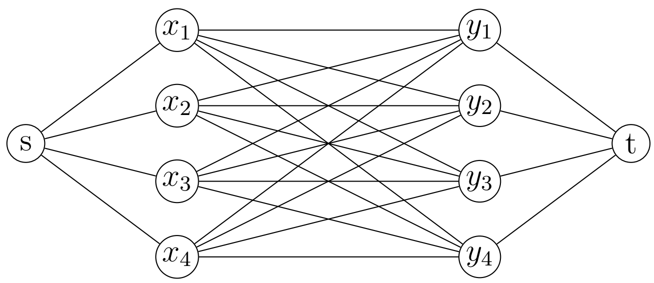
Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

Übungsblatt 8

Abgabetermin: 13.12.2012 bis 16:15 in MA043

Aufgabe 28. **5 Punkte**

Beweist, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson für das Berechnen eines maximalen Flusses nicht notwendigerweise terminiert, falls irrationale Gewichte zugelassen sind. Tipp: Betrachtet folgenden Digraphen mit Kapazitäten c_a :



Dabei repräsentiert eine Kante uv die beiden Bögen (u, v) und (v, u). Alle Bögen haben die Kapazit $\frac{1}{1-\sigma}$, außer

$$c(x_1, y_1) = 1, c(x_2, y_2) = \sigma, c(x_3, y_3) = c(x_4, y_4) = \sigma^2,$$

wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Es gilt $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. Zeigt per Induktion, dass die vier waagerechten (Vorwärts-) Bögen jeweils mit zwei augmentierenden Wegen auf die Werte $0, \sigma^n, \sigma^{n+1}, \sigma^{n+1}$ (in beliebiger Reihenfolge) gebracht werden können. Die augmentierenden Wege sind dabei Zickzack-Wege, wobei der zweite recht kompliziert sein kann.

Aufgabe 29. **5 Punkte**

Ein ungerichteter Graph G = (V, E) heißt d–regulär, wenn jeder Knoten $v \in V$ den Grad d hat. Zeigt: Die Kantenmenge eines bipartiten d–regulären Graphen lässt sich in d disjunkte perfekte Matchings zerlegen. Hinweis: Geht induktiv vor und verwendet das Max–Flow/Min–Cut Resultat.

Aufgabe 30. **5 Punkte**

Sei G ein Graph mit Kapazitäten u und zwei Quelle-Senke-Paaren, s_1 und t_1 sowie s_2 und t_2. Gesucht sind zwei Flüsse f_1 und f_2 , die gemeinsam die Kapazitäten einhalten, d.h. $f_1(e) + f_2(e) \le u(e)$, wobei f_i ein s_i-t_i-Fluß zu vorgegebenen Bedarfen

d_i ist, also $|f_i| = d_i$. Zeigt, dass dieser Fluss existiert, falls die Schnittbedingung erfüllt ist, d.h. dass für jede Teilmenge der Knotenmenge die Kapazität des durch sie definierten Schnittes größer gleich der Summe der diesen Schnitt kreuzenden Bedarfe ist. Zeigt weiter, dass diese Flüsse halb-ganzzahlig sind, wenn Bedarf und Kapazitäten ganzzahlig sind. Wer möchte, kann sich uberlegen, unter welcher Bedingung die Flüsse sogar ganzzahlig sind.

Aufgabe 31. **5 Punkte**

Die Kapazität, oder umgangssprachlich, die Dicke eines Weges ist die Kapazität seiner bezüglich Kapazität minimalen Kante(n). Gebt einen Algorithmus mit in $m + n$ linearer Laufzeit an, der in einem ungerichteten, kapazitierten s-t-Netzwerk einen dicksten s-t-Weg findet. Ihr dürft dabei - ohne Angabe eines entsprechenden Algorithmuses - verwenden, dass sich der Median eines Arrays in Linearzeit finden läßt. (cf. Cormen et al., S. 185 pp.)

Fragen: klug@zib.de