Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

Übungsblatt 7

Abgabetermin: 6.12.2012 bis 16:15 in MA043

Aufgabe 24. **5 Punkte**

Seien $(S_1, \overline{S_1})$ und $(S_2, \overline{S_2})$ zwei minimale (s,t)-Schnitte in einem Netzwerk. Zeige, dass $(S_1 \cup S_2, \overline{S_1} \cap \overline{S_2})$ auch ein minimaler (s,t)-Schnitt ist.

Aufgabe 25. **5 Punkte**

Es sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Quelle s und Senke t und ganzzahligen Kapazitäten $c_a \geq 0$ für alle $a \in A$. Außerdem sei ein ganzzahliger maximaler Fluß in G gegeben. Nun wird die Kapazität eines einzelnen Bogens

a) um 1 erhöht,

b) um 1 verringert.

Gebt einen Algorithmus der Komplexität $O(|V| + |A|)$ an, der einen maximalen Fluß in dem jeweiligen veränderten Netzwerk bestimmt.

Aufgabe 26. **5 Punkte**

Beweist Satz (6.16) aus der Vorlesung.

Ist $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition V_1, V_2, so definieren wir einen Digraphen $D = (W, A)$ wie folgt. Wir wählen zwei neue Knoten, sagen wir s und t, und setzen $W := V \cup \{s, t\}$. Die Bögen von D seien die folgenden. Ist $e = uv \in E$ eine Kante von G, so geben wir dieser die Richtung von V_1 nach V_2. Ist also $u \in V_1$ und $v \in V_2$, so wird aus $uv \in E$ der Bogen (u, v) andernfalls der Bogen (v, u). Ferner enthält D die Bögen (s, u) für alle $u \in V_1$ und die Bögen (v, t) für alle $v \in V_2$. Alle Bögen von D erhalten die Kapazität 1.

Ist G ein bipartiter Graph und D der wie oben angegeben aus G konstruierte Digraph, dann ist der Wert eines maximalen (s,t)-Flusses x in D gleich dem Wert eines maximalen Matchings in G. Ferner kann ein maximales Matching M direkt aus x konstruiert werden.

Aufgabe 27. **5 Punkte**

Gegeben sei das Netzwerk $N = (G, c, s, t)$ mit einem Digraph $D = (V, A)$, einer Kapazitätsfunktion $c : A \to \mathbb{R}$, Quelle s und Senke t. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Die Antwort sollte entweder durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel bestätigt werden.

a) Wenn $f : A \to \mathbb{R}$ ein maximaler Fluß für N ist, dann gilt entweder $f(u,v) = 0$ oder $f(u,v) = c(u,v)$ für jeden Bogen $(u,v) \in A$.

b) N besitzt einen maximalen Fluß für den gilt, daß entweder $f(u,v) = 0$ oder $f(u,v) = c(u,v)$ für jeden Bogen $(u,v) \in A$.

c) Wenn alle Kapazitäten verschieden sind, dann ist der minimale Schnitt eindeutig.

d) Wenn jede Kapazität mit einer positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.

e) Wenn zu jeder Kapazität eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ addiert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.

Fragen: klug@zib.de