

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

Übungsblatt 7

Abgabetermin: 6.12.2012 bis 16:15 in MA043

Aufgabe 24.

5 Punkte

Seien $(S_1, \overline{S_1})$ und $(S_2, \overline{S_2})$ zwei minimale (s, t) -Schnitte in einem Netzwerk. Zeige, dass $(S_1 \cup S_2, \overline{S_1} \cup \overline{S_2})$ auch ein minimaler (s, t) -Schnitt ist.

Aufgabe 25.

5 Punkte

Es sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Quelle s und Senke t und ganzzahligen Kapazitäten $c_a \geq 0$ für alle $a \in A$. Außerdem sei ein ganzzahliger maximaler Fluß in G gegeben. Nun wird die Kapazität eines einzelnen Bogens

- a) um 1 erhöht,
- b) um 1 verringert.

Gebt einen Algorithmus der Komplexität $O(|V| + |A|)$ an, der einen maximalen Fluß in dem jeweiligen veränderten Netzwerk bestimmt.

Aufgabe 26.

5 Punkte

Beweist Satz (6.16) aus der Vorlesung.

Ist $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition V_1, V_2 , so definieren wir einen Digraphen $D = (W, A)$ wie folgt. Wir wählen zwei neue Knoten, sagen wir s und t , und setzen $W := V \cup \{s, t\}$. Die Bögen von D seien die folgenden. Ist $e = uv \in E$ eine Kante von G , so geben wir dieser die Richtung von V_1 nach V_2 . Ist also $u \in V_1$ und $v \in V_2$, so wird aus $uv \in E$ der Bogen (u, v) andernfalls der Bogen (v, u) . Ferner enthält D die Bögen (s, u) für alle $u \in V_1$ und die Bögen (v, t) für alle $v \in V_2$. Alle Bögen von D erhalten die Kapazität 1.

Ist G ein bipartiter Graph und D der wie oben angegeben aus G konstruierte Digraph, dann ist der Wert eines maximalen (s, t) -Flusses x in D gleich dem Wert eines maximalen Matchings in D . Ferner kann ein maximales Matching M direkt aus x konstruiert werden.

Aufgabe 27.

5 Punkte

Gegeben sei das Netzwerk $N = (G, c, s, t)$ mit einem Digraph $D = (V, A)$, einer Kapazitätsfunktion $c : A \rightarrow \mathbb{R}$, Quelle s und Senke t . Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Die Antwort sollte entweder durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel bestätigt werden.

- a) Wenn $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ein maximaler Fluß für N ist, dann gilt entweder $f(u, v) = 0$ oder $f(u, v) = c(u, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in A$.
- b) N besitzt einen maximalen Fluß für den gilt, daß entweder $f(u, v) = 0$ oder $f(u, v) = c(u, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in A$.
- c) Wenn alle Kapazitäten verschieden sind, dann ist der minimale Schnitt eindeutig.
- d) Wenn jede Kapazität mit einer positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.
- e) Wenn zu jeder Kapazität eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ addiert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.