

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

Übungsblatt 6

Abgabetermin: 29.11.2012 bis 16:15 in MA043

Aufgabe 20.

5 Punkte

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x && \text{(CLP)} \\ 0 \leq x_e \leq 1 & \quad \forall e \in E, \\ x(C) \leq |C| - 1 & \quad \forall C \subseteq E, C \text{ Kreis in } G \\ x_e \in \mathbb{R} & \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x && \text{(ZLP)} \\ 0 \leq x_e \leq 1 & \quad \forall e \in E \\ x(E(W)) \leq |W| - 1 & \quad \forall W \subseteq V, (W, E(W)) \text{ ist 2-fach zusammenhängend} \end{aligned}$$

Betrachtet die zwei in der Vorlesung vorgestellten LP-Formulierungen (CLP) und (ZLP) für das gewichtsmaximale Wald Problem. CLP ist die LP-Relaxierung der IP-Formulierung aus der Vorlesung, d.h. auf die Ganzzahligkeit wird verzichtet.

- Bestimmt jeweils das duale LP zu CLP und zu ZLP.
- Betrachtet den vollständigen Graphen K_4 auf 4 Knoten mit Gewicht 1 auf jeder Kante. Findet die Optimallösung von beiden Formulierungen und nutzt das duale LP und den schwachen Dualitätssatz um die Optimalität eurer Lösungen zu beweisen.

Aufgabe 21.

5 Punkte

Gegeben sei ein vereinfachtes Straßennetzwerk einer Stadt, in dem alle Straßen entweder parallel zur x-Achse oder zur y-Achse verlaufen. Der Aufwand, der durch das Benutzen einer Straße für einen Fahrer entsteht, sei durch die Kosten auf den entsprechenden Kanten des Netzwerkes modelliert.

Leider gibt es in dieser Stadt keine Ampeln, und es ist somit ein Problem an einer Kreuzung links abzubiegen. Die zusätzlichen Kosten, die durch ein Linksabbiegen entstehen, seien konstant α an jeder Kreuzung.

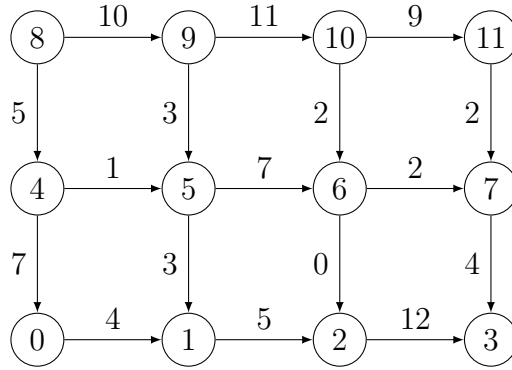


Abbildung 1: Stadtplan von Little-Manhattan

- Beschreibt einen Algorithmus, der das Kürzeste-Wege-Problem mit Abbiegekosten löst. (Hinweis: Entwerft euch einen neuen Graphen, der die Abbiegekosten enthält.)
- Führt den Algorithmus auf dem Beispielgraphen der Stadt Little-Manhattan in Abbildung 1 mit $\alpha = 5$, $s = v_8$ und $t = v_3$ vor.

Aufgabe 22.

5 Punkte

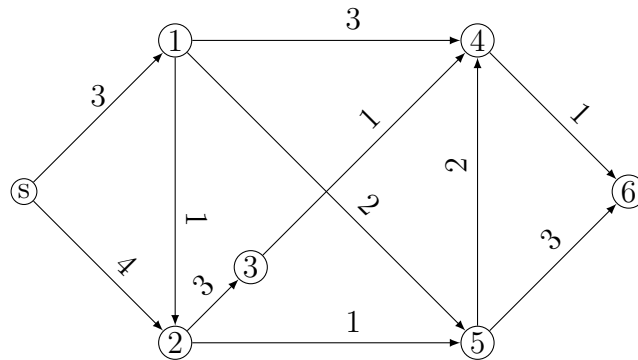


Abbildung 2: Graph

- Berechnet mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten und gebt den Kürzesten-Wege-Baum (d.h. die kürzeste-Wege-Arboreszenz) an!
- Ist der Kürzeste-Wege-Baum aus a) eindeutig?
- Verändert das Gewicht von Bogen $(3, 4)$ auf -2 . Wendet zur Berechnung der kürzesten Wege den Moore-Bellmann-Algorithmus für azyklische Digraphen an und zeigt, dass der Dijkstra-Algorithmus in diesem Fall nicht korrekt funktioniert.

Aufgabe 23.

1 Punkte

Gegeben sei ein Digraph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine Funktion $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für die gilt $f(u, w) \leq \text{dist}(u, w)$ wobei $\text{dist}(x, y)$ gleich der

Länge eines kürzesten Weges zwischen $x \in V$ und $y \in V$ ist. Weiterhin erfüllt f folgende Dreiecksungleichung $c(v, w) + f(w, t) \geq f(v, t)$

Verändert die Kantenlänge, wie folgt; $c'(v, w) = c(v, w) - f(v, t) + f(w, t)$ und wendet nun einen passenden Kürzeste-Wege-Algorithmus an.

- a) Beweist, dass die kürzesten Wege sich durch die neuen Kantenlänge nicht verändert haben.
- b) Beschreibt kurz und präzise, bei welchem Kürzesten-Wege-Algorithmus dieses Verfahren von Vorteil sein kann und worin dieser Vorteil besteht.
- c) Gebt eine Familie von Beispielen mit beliebig großer Knotenzahl an, so dass durch (beliebige) Verwendung von f keine Beschleunigung möglich ist, auch wenn $\text{dist}(v, w) - f(v, w)$ beliebig klein ist.