Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

# Übungsblatt 5

Abgabetermin: 22.11.2012 bis 16:15 in MA043

**Aufgabe 16.** **5 Punkte**

Beweist die Korrektheit des Algorithmus GREEDY-MAX aus der Vorlesung.

**Aufgabe 17.** **5 Punkte**

Beweist den folgenden Satz! Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit $n \geq 2$ Knoten. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $D$ ist eine Arboreszenz.

(2) $D$ ist ein Baum mit Wurzel.

(3) $D$ hat $n-1$ Bögen und ist quasi-stark zusammenhängend.

(4) $D$ enthält keinen Kreis und ist quasi-stark zusammenhängend.

(5) $D$ enthält einen Knoten $r$, so dass es in $D$ für jeden anderen Knoten $v$ genau einen gerichteten $(r, v)$-Weg gibt.

(6) $D$ ist quasi-stark zusammenhängend, und für alle $a \in A$ ist $D-a$ nicht quasi-stark zusammenhängend.

(7) $D$ ist quasi-stark zusammenhängend, besitzt einen Knoten $r$ mit $\deg^-(r) = 0$ und erfüllt $\deg^-(v) = 1$ für alle $v \in V \backslash \{r\}$.

(8) $D$ ist ein Baum, besitzt einen Knoten $r$ mit $\deg^-(r) = 0$ und erfüllt $\deg^-(v) = 1$ für alle $v \in V \backslash \{r\}$.

(9) $D$ enthält keinen Kreis, einen Knoten $r$ mit $\deg^-(r) = 0$ und erfüllt $\deg^-(v) = 1$ für alle $v \in V \backslash \{r\}$.

**Aufgabe 18.** **5 Punkte**

Gib einen Algorithmus mit (der Größenordnung nach) möglichst guter Laufzeit an, der in einem ungerichteten Graphen einen spannenden Baum findet, der minimal bezüglich seiner maximalen Kante ist. D.h., wenn $l$ das Gewicht seiner schwersten

Kanten ist, so hat jeder andere spannende Baum mindestens eine Kante mit höherem Gewicht. Beweist die Korrektheit und Laufzeit eures Algorithmus.

**Aufgabe 19.** **5 Punkte**

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Gewichten $c_a \in \mathbb{R}$, $c_a \geq 0$ für jeden Bogen $a \in A$. Sei $s \in V$. Zeigt: $T$ ist ein Kürzester-Wege-Baum von $s$ genau dann wenn $d_T(s, u) + c(u, v) \geq d_T(s, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in A$ der nicht in $T$ enthalten ist gilt; dabei ist $d_T(s, u)$ die Distanz bezüglich $c$ in $T$.

**Fragen: klug@zib.de**