Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 12/13

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

Übungsblatt 14

Abgabetermin: 07.02.2013 bis 16:15 in MA043

Aufgabe 48. **5 Punkte**

Phase 2 des Simplexalgorithmus werde mit zulässiger Startbasis B_0 auf ein LP angewendet. In k Pivotschritten mit den Pivotelementen $\bar{a}_{i_l j_l}, l = 1, \ldots, k$ werden dabei die Basen $B_l, l = 1, \ldots, k$ durchlaufen. Dann gilt

$$\mathsf{det}\, B_k = \prod_{l=1}^{k} \bar{a}_{i_l j_l} \,\mathsf{det}\, B_0$$

Aufgabe 49. **5 Punkte**

Beweist folgenden Satz:

Seien A eine (m, n)-Matrix, $b \in \mathbb{K}^m$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und I, J eine Partition der Zeilenindexmenge $M = \{1, \ldots, m\}$. Seien $D \in \mathbb{K}^{r \times n}$, $d \in \mathbb{K}^r$ die durch Fourier-Motzkin-Elimination der Variablen j gewonnene Matrix bzw. Vektor.

Setze $E := p^{-1}((Z \cap I) \cup ((N \times P) \cap (I \times I)))$, $F := R \setminus E$, wobei $N := \{i \in M \mid a_{ij} < 0\}, Z := \{i \in M \mid a_{ij} = 0\}, P := \{i \in M \mid a_{ij} > 0\}$ und $p : R \to Z \cup (N \times P)$ eine Bijektion (d. h. eine kanonische Indizierung der Elemente von $Z \cup (N \times P)$), dann gilt: Das System

$$A_{I.}x \leq b_I, A_{J.}x < b_J$$

hat eine Lösung genau dann, wenn das System

$$D_{E.}x \leq d_E, D_{F.}x < d_F$$

eine Lösung hat.

Aufgabe 50. **5 (+2 Zusatzpunkte) Punkte**

Ihr habt eine Tüte mit 100 Gummibärchen und sollt sie unter einer Kindergartengruppe verteilen. Die Gruppe besteht aus Egon, Lisa, Tom und Ina. Egon argumentiert, dass er doppelt so alt ist wie Lisa und ihm deshalb doppelt so viele Gummibärchen zustehen wie ihr. Darauf meldet sich lautstark Tom und will mehr als jeder andere haben, da er ja der Größte in der Gruppe ist. Lisa und Ina teilen sich ihre Gummibärchen, wollen aber zusammen mindestens ein Gummibärchen mehr haben als Tom. Jedes Kind soll mindestens 10 Gummibärchen bekommen. Es muss nicht die ganze Tüte ausgeteilt werden, wenn ihr die Gummibärchen geschickt verteilt, bleiben vielleicht auch noch ein paar für euch übrig.

Wie müsst ihr die Gummibärchen verteilen, dass alle Kinder zufrieden sind und ihr möglichst viele übrig behaltet.

a) Formuliert das Problem als lineares Programm und löst es mit der Fourier-Motzkin-Elimination

b) **(Optional)** Wie sieht das Zulässigkeitsproblem aus, wenn man alle Gummibärchen verteilen möchte.

Aufgabe 51. **5 Punkte**

Wir borgen uns für diese Aufgabe ein bisschen bei den Wirtschaftswissenschaftlern. Angenommen wir haben einen Markt mit n verschiedenen Waren und betrachten genau eine Handelsphase. Damit ist folgendes gemeint: Wir können uns einmal entscheiden, wie viel wir in welche Ware investieren. Dann heißt es: RIEN NE VA PLUS und es wird gleichzeitig für alle Waren ausgewürfelt, welche Gewinne man mit ihnen gemacht hat. Etwas formaler: Es gibt genau m verschiedene Zustände, in die die Welt nach dem Würfeln geraten kann. Und es gibt eine $m \times n$-Matrix, R, deren Eintrag r_{ij} angibt, wieviel Euro man für einen Einheit Ware j bekommt, falls die Welt in Zustand i gerät. Man kann bei den Wirtschaftlern jede Ware auch negativ kaufen, so dass man einfach einen Portfoliovektor $x \in \mathbb{R}^n$ wählt und sich der Erlös w_i in Zustand i, als die i-te Komponente von $Rx = w$ berechnet.

Soweit zum Erlös, jetzt zum Einsatz! Die Frage ist, wieviel soll auf dem Markt für eine Einheit der Ware j vorher verlangt werden? Die einzige Anforderung, die gestellt werden soll, ist die Arbitragefreiheit, d.h. der Preisvektor $p \in \mathbb{R}^n$ muss so gewählt sein, das jedes Portfolio x, welches in jedem möglichen Weltzustand zumindest keinen Verlust bringt, auch vorher keine negativen Kosten haben darf, also $p^T x \geq 0$.

Beweist folgenden Satz: Gegeben eine Erlös-Zustands-Matrix R. Ein Preisvektor p ist genau dann arbitragefrei, wenn es einen nicht negativen Vektor $s \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $p_j = \sum_{l=1}^m s_l r_{lj}$. Gib ferner eine vernünftige Deutung für die wirtschaftliche Rolle des Vektors p.

Aufgabe 52. **Zusatzpunkte 2+3+3 Punkte**

Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{rrrrcl} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & & \leq & 5 \\ & & x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \tag{LP}$$

a) Lösen Sie das LP mit der Fourier-Motzkin Elimination.

b) Ermitteln Sie das zu (LP) duale Programm (D).

c) Ermitteln Sie die Bedingungen des komplementären Schlupfes für das Problem und lösen Sie damit (D).

Fragen: klug@zib.de