

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
 Dr. Benjamin Hiller

Übungsblatt 12

Abgabetermin: 24.01.2013 bis 16:15 in MA043

Aufgabe 40.

4 Punkte

Löst das folgende LP zweimal mit der Tableaumethode. Pivotsiert einmal lexikographisch und einmal nach der Regel von Bland:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 - \frac{9}{5}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 11x_4 \leq 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Bei der Regel von Bland wird aus den möglichen Spalten, die mit dem kleinsten Index gewählt. Gibt es in einer Spalte mehr als einen Pivotkandidaten, wird der mit dem kleinsten Zeilenindex genommen. Markiert in jeder Iteration das Pivotelement.

Aufgabe 41.

3 Punkte

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\ & x_1 \leq 1 \end{array}$$

Eine zulässige Basis sind die Schlupfvariablen. Wende den Simplex-Algorithmus solange an, bis diese Basis ein zweites mal erreicht wird. Dabei wähle als neue Basisvariable x_j die mit dem größten relativen Abstieg. Bei einer Auswahl zwischen mehreren die Basis potenziell verlassenden Variablen wähle die mit dem kleinsten Index.

Hinweis: Nach 6 Iterationen erreicht man wieder die Ausgangskonfiguration.

Aufgabe 42.

5 Punkte

Man betrachte die Behandlung des Problems (Klee&Minty 1972)

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j \\ & \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j \right) + x_i \leq 100^{i-1} & i = 1, \dots, n \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{array}$$

durch das Simplexverfahren. Die Schlupfvariablen seien mit s_1, \dots, s_n bezeichnet. Zeigt, dass in jeder zulässigen Basis genau eine der Variablen x_j und s_j enthalten ist.

Aufgabe 43.

2+2+2+2 Punkte

Zeigt unter Verwendung von Aufgabe 42 und Induktion über n , dass mit der Steilster-Anstieg-Regel die Tableaux die folgenden Eigenschaften haben.

a) Nach $2^{n-1} - 1$ Iterationen sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten gegeben durch

$$c^T x = 10 \left(100^{n-2} - \sum_{j=1}^{n-2} 10^{n-1-j} x_j - s_{n-1} \right) + x_n$$

b) Nach 2^{n-1} Iterationen sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten gegeben durch

$$c^T x = 90 \cdot 100^{n-2} + 10 \left(\sum_{j=1}^{n-2} 10^{n-1-j} x_j + s_{n-1} \right) - s_n$$

c) Nach $2^n - 1$ Iterationen sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten gegeben durch

$$c^T x = 100^{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} 10^{n-j} x_j - s_n$$

d) In jeder Iteration sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten ganzzahlig.