Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 12/13

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Benjamin Hiller

# Übungsblatt 10

Abgabetermin: 10.01.2013 bis 16:15 in MA043 für die Aufgaben 32 und 34

Die Abgabefrist für Aufgabe 32 und 34 wird bis zum 10.01.2012 verlängert.

**Aufgabe 32.** **5 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph mit Kapazitäten $u : E \to \mathbb{R}_+$ und sei $b : V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in v} b(v) = 0$. Zeigt, dass ein $b$-Fluss genau dann existiert, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \quad \forall X \subseteq V.$$

**Aufgabe 34.** **5 Punkte**

Sei $\mathcal{I} = (D = (V, A), c, b, l, u)$ eine Instanz eines Minimalkosten-Flussproblems mit $l_a < u_a$ für alle $a \in A$ ($c$ Kosten, $b$ Bedarfe, $l$ untere Schranken, $u$ obere Schranken). Wir definieren den „Nettobedarf“ $\tilde{b}(i)$ für Knoten in $V$ als

$$\tilde{b}_i := b_i + l(\delta^+(i)) - l(\delta^-(i)), \tag{1}$$

Wir setzen

$$V^+ := \{i \in V \mid \tilde{b}_i < 0\},$$
$$V^- := \{i \in V \mid \tilde{b}_i \geq 0\}.$$

Der Digraph $D' = (V', A')$ enthält einen zusätzlichen Knoten $k$ mit Bedarf $b'_k = 0$ sowie einen Bogen $(k, i)$ für jeden Knoten $i \in V^-$ und einen Bogen $(i, k)$ für jeden Knoten $i \in V^+$. Die Kosten für diese zusätzlichen Bögen werden so hoch gesetzt, dass sie in keiner Optimallösung für $\mathcal{I}'$ gewählt werden, falls $\mathcal{I}$ zulässig ist, also z.B.

$$M := 1 + \frac{1}{2}|V| \max\{|c_a| \mid a \in A\}.$$

Die erweiterte Instanz $\mathcal{I}' = (D' = (V', A'), c', b', l', u')$ ist dann gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
V' &:= V \cup \{k\} \\
A' &:= A \cup \{(k,i) \mid i \in V^-\} \cup \{(i,k) \mid i \in V^+\} \\
c'_a &:= \begin{cases} c_a & a \in A \\ M & a \in A' \setminus A \end{cases} \\
b'_i &:= \begin{cases} b_i & i \in V \\ 0 & i \in V' \setminus V \end{cases} \\
l'_a &:= \begin{cases} l_a & a \in A \\ 0 & a \in A' \setminus A \end{cases} \\
u'_a &:= \begin{cases} u_a & a \in A \\ \infty & a \in A' \setminus A \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Es gilt:

(a) Es existiert eine zulässige Lösung für $\mathcal{I}'$. Genauer bilden

$$T := A' \setminus A, \quad L := A, \quad U := \emptyset$$

und der durch $T$ definierte Fluss $x$ eine zulässige Baum-Lösung von $\mathcal{I}'$ (siehe Vorlesung Definition 7.16).

(b) Gilt in einer Optimallösung $x$ von $\mathcal{I}'$ $x_a > 0$ für einen Bogen $a \in A' \setminus A$, so existiert kein zulässiger Fluss für $\mathcal{I}$.

(c) Ist $x$ ein optimaler zulässiger Fluss für $\mathcal{I}'$ mit $x_a = 0$ für $a \in A' \setminus A$, so ist $x$ eingeschränkt auf $A$ ein optimaler zulässiger Fluss für $\mathcal{I}$.

## Programmieraufgabe 1

Abgabetermin: Meilenstein bis spätestens 18.01.2013
und Netzwerksimplex bis spätestens 31.01.2013

Das Ziel der Programmieraufgabe ist es den Netzwerk-Simplex-Algorithmus zu implementieren. Die Wahl der Programmiersprache steht euch frei, insofern folgendes gegeben ist:

- Das Programm läuft unter Linux im Unix-Pool und lässt sich dort soweit nötig auch kompilieren.
- Er werden keine Zusatzbibliotheken genutzt, die nicht schon im Standard enthalten sind. Alles was die Programmiersprache mitbringt, wie zum Beispiel Listen, Vektoren usw. können natürlich genutzt werden.
- Das Programm lässt sich unabhängig von einer Entwicklungsumgebung, wie zum Beispiel Eclipse, starten.

- Das Programm lässt sich aus der Kommandozeile mit dem Aufruf

  ```
  netzwerksimplex <Eingabedatei> <Ausgabedatei>
  ```

  starten. Der Name *netzwerksimplex* kann, wenn nötig, auch ersetzt werden (*.py, *.java, ...). Am Ende der Berechnung wird der Wert der Optimallösung in die Kommandozeile ausgegeben. Die genauen Flusswerte sollen im fertigen Programm nur noch in die Ausgabedatei geschrieben werden.

- Ein entsprechender Compiler oder Interpreter muss frei verfügbar sein.

Eine Menge von Beispielinstanzen werden auf der Website zur Vorlesung bereit gestellt. Dies ist eine Teilmenge der Testdaten von `http://elib.zib.de/pub/Packages/mp-testdata/mincost/`.

**Teilaufgaben**

1. **Erstellen einer Graphenklasse**
   Erstellt euch eine eigene Graphenklasse für gerichtete einfache Graphen.

2. **Einlesen der Daten** Die Beschreibung des Eingabeformates ist unter `http://elib.zib.de/pub/Packages/mp-testdata/mincost/netg/info` zu finden.

   Für eine Probleminstanz kann folgendes angenommen werden:

   - der gerichtete Graph ist einfach, d.h. er enthält keine Schleifen oder parallele Kanten,
   - das Angebot ist genau so groß wie die Nachfrage $\sum_{i \in V} b_i = 0$,
   - für alle Bögen $a \in A$ ist die untere Schranke immer echt kleiner als die obere Schranke, $l_a < u_a$

   Tipp: Erstellt euch zum Testen selber kleine Instanzen mit wenigen Knoten.

3. **Implementiert den Netzwerksimplex** Es bietet sich an, die in der Übung vorgestellte Datenstruktur des 3er Arrays $d, s, p$ für eine Baumlösung zu nutzen. Vergesst nicht die Implementierung einer geeigneten Strategie um Cycling zu vermeiden. Bis zum Meilenstein muss die Konstruktion einer zulässigen Baumlösung implementiert sein. Hierfür kann die Konstruktion aus Aufgabe 34 genutzt werden.

4. **Ausgabe der Lösung** Die Lösung soll in eine Datei mit folgendem Format geschrieben werden:

   ```
   <cost>
   <u1> <v1> <flow1>
   <u2> <v2> <flow2>
   <u3> <v3> <flow3>
   ...
   ```

**cost** minimale Gesamtkosten

**u** Startknoten des Bogens

**v** Endknoten des Bogens

**flow** Flusswert der Kante

**Abgabe** Für die Programmieraufgabe gibt es keine Punkte. Für die erfolgreiche Teilnahme an der Vorlesung muss sie erfolgreich bearbeitet werden. Die gegebenen Probleminstanzen müssen optimal gelöst oder die Unzulässigkeit erkannt werden. Jedes Gruppenmitglied muss in der Lage sein den Code zu erklären.

Der Meilenstein umfasst die Teilaufgaben 1 und 2 sowie die Konstruktion einer zulässigen Baumlösung aus Teilaufgabe 3.

Vereinbart frühzeitig einen Termin zur Abgabe des Meilensteins und der Endabnahme. Die Endabnahme kann bis zum 18.01.2013 auch gleichzeitig mit dem Meilenstein gemacht werden. Der frühste Abgabetermin ist der 3. Januar 2013.

Viel Erfolg.

Frohe Weihnachten
und
einen guten Rutsch ins neue Jahr!

**Fragen: klug@zib.de**