TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug

11. Übungsblatt

Abgabetermin: 08.07.2015 bis 10:15 in MA041

Aufgabe 31. **10 Punkte**

Gegeben sei das folgende Ungleichungssystem S mit $k \in \mathbb{Z}, k > 0$

$$-kx + y \leq 0 \tag{1}$$
$$kx + y \leq k \tag{2}$$
$$-y \leq 0 \tag{3}$$

Die ganzzahligen Lösungen von S sind die Vektoren $\binom{0}{0}, \binom{1}{0}$.

Beweist die folgenden Aussagen:

a) Die Ungleichungen

$$y \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \tag{4}$$
$$-y \leq 0 \tag{5}$$
$$x \leq 1 \tag{6}$$

gehören zu $e^1(S)$.

b) Die Ungleichung

$$y \leq 0 \tag{7}$$

gehört nicht zu $e^1(S)$, falls $k \geq 2$. (offensichtlich gehört (7) aber zu $cl(S)$).

Aufgabe 32. **10 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c_e \in \mathbb{Q}$ für alle $e \in E$. Betrachtet die folgende Formulierung des Matching-Problems als ganzzahliges Programm

$$\begin{aligned} & \max\ c^T x \\ x(\delta(v)) := \sum_{e \in \delta(v)} & x_e \leq 1 && \forall v \in V \\ & x_e \geq 0 && \forall e \in E \\ & x_e \in \{0, 1\} && \forall e \in E \end{aligned} \tag{8}$$

Sei $P(G)$ die Menge der zulässigen Lösungen von (8) ohne die Ganzzahligkeitbedingung. Sei MATCH(G) die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Matchings in

G. Aus der Vorlesung ist bekannt das MATCH(G) durch das folgende System von Ungleichungen beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &\leq 1 && \forall v \in V \\ x(E(W)) &\leq \frac{1}{2}(|W|-1) && \forall W \subseteq V, |W| \geq 3 \text{ und ungerade} \\ x_e &\geq 0 && \forall e \in E. \end{aligned} \tag{9}$$

Zeigt, dass für jeden Graphen G gilt

$$\mathrm{MATCH}(G) = P(G)^1,$$

d. h. das Ungleichungssystem (9) gehört zum elementaren Abschluss des Ungleichungssystems (8).

Aufgabe 33. **10 Punkte**

Löst das folgende Optimierungsprobleme mit Hilfe des Ersten Gomery-Algorithmus.

$$\begin{aligned} \max\ & 4x - y \\ & 7x - 2y \leq 14 \\ & y \leq 3 \\ & 2x - 2y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \\ & x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{IP}$$

Zusatzaufgabe **10 Zusatzpunkte**

Löst das folgende Optimierungsprobleme mit Hilfe von Gomery's gemischt-ganzzahligem Algorithmus.

$$\begin{aligned} \max\ & 4x - y \\ & 7x - 2y \leq 14 \\ & y \leq 3 \\ & 2x - 2y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{MIP}$$

Dies ist das letzte Blatt der zweiten Semesterhälfte.

Fragen: klug@zib.de