Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug

9. Übungsblatt

Abgabetermin: 24.06.2015 bis 10:15 in MA041

Aufgabe 27. 10 Punkte

Steinerbaumproblem

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c_e, e \in E$ und eine Teilmenge der Knoten $T \subseteq V$ (Terminale).

Gesucht: Steinerbaum für T in G mit minimalem Gewicht. Ein Steinerbaum S für T in G ist ein Baum mit $T \subseteq V(S) \subseteq V$ und $E(S) \subseteq E$.

a) Im Allgemeinen ist das Steinerbaumproblem NP-schwer. Gebt zwei nicht triviale Spezialfälle an, für die sich das Steinerbaumproblem mit einem polynomiellen Algorithmus lösen lässt.

b) Formuliert das Steinerbaumproblem als IP.

c) Schreibt ein ZIMPL Programm(http://zimpl.zib.de/) für eure Formulierung aus Teil b) und und überlegt euch zur Kontrolle ein kleines Beispiel mit mindestens 5 Knoten. Löst das Problem mit einem MIP-Solver eurer Wahl (CPLEX, SCIP, GLPK, usw.). Das ZIMPL Programm schickt bitte an `klug@zib.de`.

Aufgabe 28. 10 Punkte

Gegeben seien Quader beliebiger Seitenlängen. Diese sollen in eine möglichst kleine Kiste gepackt werden. Die Größe der Kiste wird bemessen nach der Summer ihrer Kantenlängen. Die Quader dürfen in beliebiger Position und Lage in die Kiste gepackt werden. Allerdings müssen sie kantenparallel zur Kiste stehen und dürfen sich nicht überschneiden.

a) Modelliert das beschriebene Problem als MIP.

b) Erstellt ein ZIMPL Programm für die folgenden Testinstanzen:

- Es sollen 5 Würfel mit Kantenlängen von eins bis fünf gepackt werden.

- Es sollen 20 Würfel, je 4 Würfel pro Kantenlänge von eins bis fünf, gepackt werden.

Das ZIMPL Programm schickt bitte an `klug@zib.de`.

c) Probiert eure ZIMPL Programme mit einem MIP-Löser eurer Wahl aus. (Versichert euch vorher, dass ihr wisst wie man den Löser abbricht.)

Aufgabe 29. **10 Punkte**

Wir gehen aus von einem LP in Standardform (P) und seinem dualen Programm (D) mit zusätzlich eingeführten Schlupfvariablen s in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (P) \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \max\ & u^T b \\ & u^T A + s^T = c^T \\ & s \geq 0 \end{aligned} \qquad (D)$$

a) Zeigt, dass die KKT-Bedingungen aus Satz (5.37) äquivalent sind zu

$$\begin{aligned} \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j - A_{\cdot j}^T u} &= b \qquad \forall j = 1, \dots m, \\ c - A^T u &> 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalten von Matrix A ist und $A_{\cdot j}$ den j-te Spaltenvektor von A bezeichnet. Zudem sei $\mu > 0$.

b) Gegeben sei ein LP in Standardform (s.o.) mit den Werten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

1. Berechnet für $t = 0$ und $t = 1$ die zentralen Pfade für (P) $x(\mu), s(\mu)$ und (D) $u(\mu)$. (Tipp: Nutzt dafür die Bedingungen aus Aufgabenteil a).)
2. Zeichnet das Polyeder von (D) und den zentralen Pfad $u(\mu)$ für $t \in \{0, 1\}$.
3. **(5 Zusatzpunkte)** Zeichnet das Polyeder von (P), $x(\mu)$ und $s(\mu)$ für $t \in \{0, 1\}$

Fragen: klug@zib.de