Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 11.05.2015 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 7. 10 Punkte

Eine Firma kann 30 Mio. Euro investieren. Dieser Betrag kann auf drei Zweigwerke aufgeteilt werden. Um die Beschäftigung an den drei Stellen einigermaßen konstant zu halten, sollen mindestens 3 Mio. bei Stelle A, mindestens 5 Mio. bei B und mindestens 8 Mio. bei C investiert werden. Aufgrund von Marktbeschränkungen wäre es Unsinn, bei B mehr als 17 Mio. zu investieren. Jedes Zweigwerk hat eine Auswahl verschiedener Projekte, die mit Investitionsmitteln ausgestattet werden können. Für jedes dieser Projekte ist die Rendite (jährlicher Gewinn pro Mio. Investition) und eine Obergrenze für die zugehörige Investition bekannt. Die Daten hierfür sind:

Zweigwerk	Projekt	Rendite	Obergrenze
A	A1	8%	6 Mio.
	A2	6%	5 Mio.
	A3	7%	9 Mio.
B	B1	5%	7 Mio.
	B2	8%	10 Mio.
	B3	9%	4 Mio.
C	C1	10%	6 Mio.
	C2	6%	3 Mio.

Wie sollen die 30 Mio. auf die Zweigwerke und von dort auf die Projekte verteilt werden, um maximalen Gewinn pro Jahr zu erzielen?

a) Formuliert die Fragestellung als lineares Programm.

b) Nun erhaltet ihr als Arbeitgeber folgende Informationen. Die Belegschaften der Werke A, B und C haben beschlossen, in einen einmonatigen Streik zu treten, wenn ihr eigenes Werk nicht mindestens so viele Investitionsmittel erhält wie jedes der beiden anderen. Wie fällt ihr diese Entscheidung, wenn der Gewinn für das nächste Jahr maximiert werden soll? Das Problem lässt sich so angehen, dass man mehrere lineare Teilprobleme löst. Schlagt einen möglichen Lösungsweg vor und formuliert die dabei auftretenden linearen Teilprobleme.

Aufgabe 8. **10 Punkte**

Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ sei das Polytop

$$\mathrm{ST}(G) := \mathsf{conv}\{\chi^T \in \mathbb{R}^E \mid T \subseteq E,\ (V,T) \text{ aufspannender Baum von } G\}$$

definiert. ($\chi_e^T = 1$ falls $e \in T$, sonst 0.)

(a) Zeigt, dass $\dim(\mathrm{ST}(C_n)) = n - 1$! C_n ist der Kreis auf n Knoten.

(b) Zeigt, dass $\dim(\mathrm{ST}(K_n)) = \binom{n}{2} - 1$! K_n ist der vollständige Graph auf n Knoten.

(c) **Zusatzaufgabe** (5 Punkte)
Zeigt, dass $\dim(\mathrm{ST}(G)) = |E| - |\text{Blöcke}|$, wobei G ein zusammenhängender Graph ist. Ein *Block* ist eine Brücke oder ein maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph.

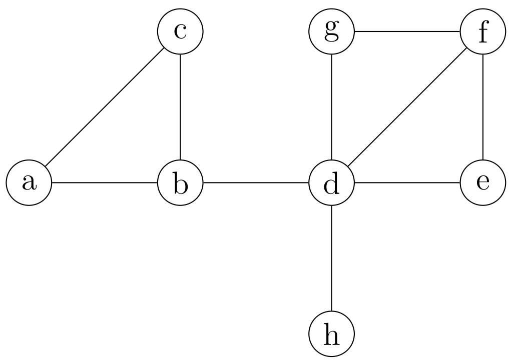

Abbildung 1: Der Beispielgraph hat die Blöcke $\{a, b, c\}, \{b, d\}, \{d, e, f, g\}, \{d, h\}$.

Aufgabe 9. **10 Punkte**

Beweist das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Ist F eine nichtleere Seitenfläche von $P = P(A, b)$, gilt $I = \mathrm{eq}(F)$, und ist $B = \{y^1, \ldots, y^k\}$ eine Basis des Kerns von $A_{I.}$, dann gibt es zu jedem inneren Punkt $x \in F$ von F ein $\varepsilon > 0$, so dass $x \pm \varepsilon y^j \in P$ für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt.

Fragen: klug@zib.de