„Lange Nacht der Wissenschaft“

Ein Klassiker – Die Mathematik der Kürzesten Wege

Thomas Schlechte

09.06.2007

Thomas Schlechte Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB)

schlechte@zib.de http://www.zib.de/schlechte

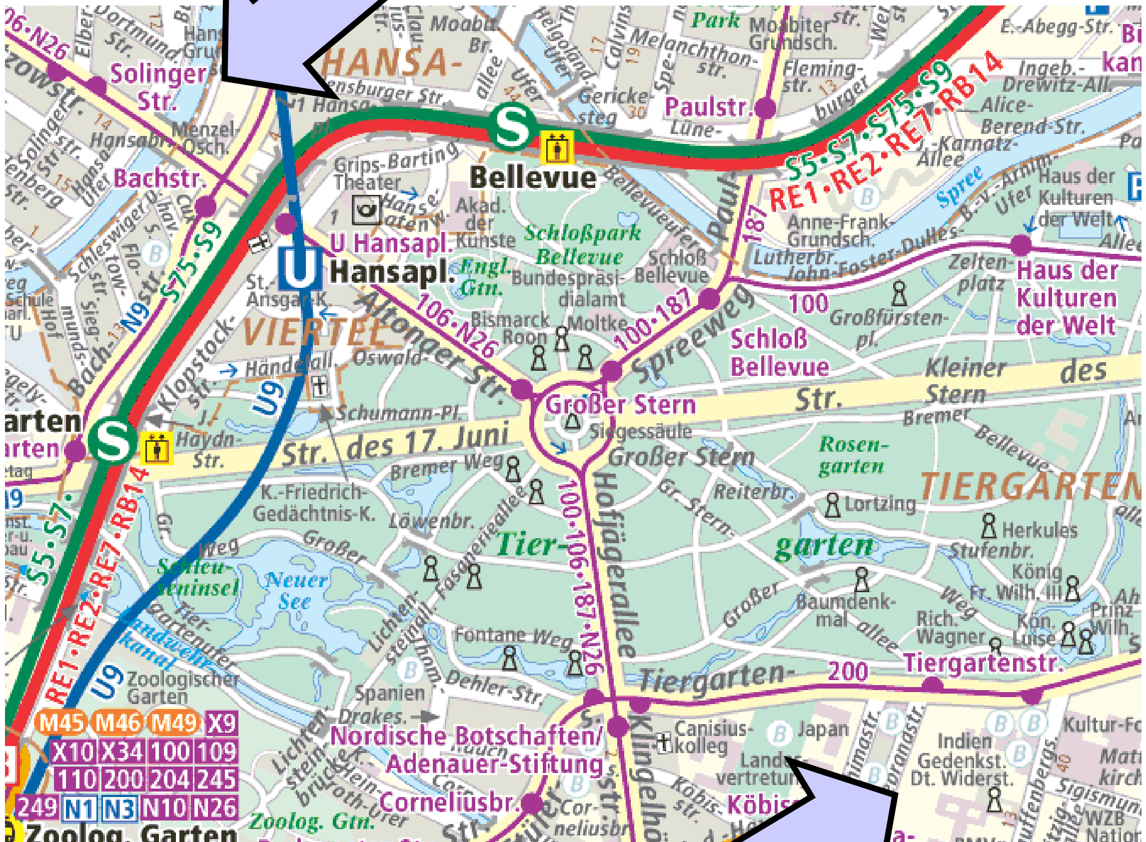
Überblick

- Problem – Motivation
- Graphentheorie und Euler
- Der Algorithmus von Dijkstra
- Grenzen des Modells
- Ein Verkehrs-Paradoxon

Motivation

Die Frage ist:
„Wie komme ich hin ?"

Hier will ich hin !



Hier bin ich !

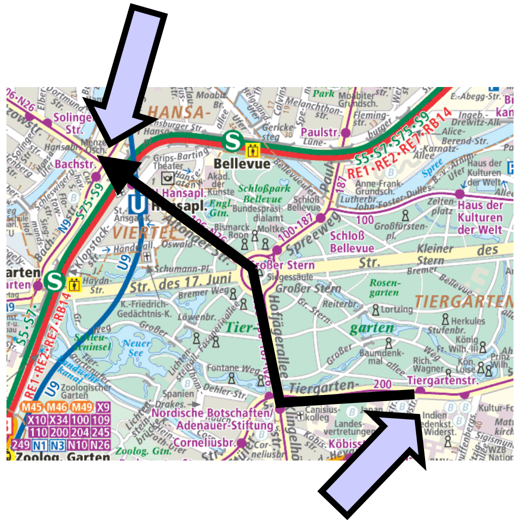
ZIB

Thomas Schlechte

Ziel

Antwort !

Umsetzbar, Schnell und Richtig !



Mögliche Antwort:

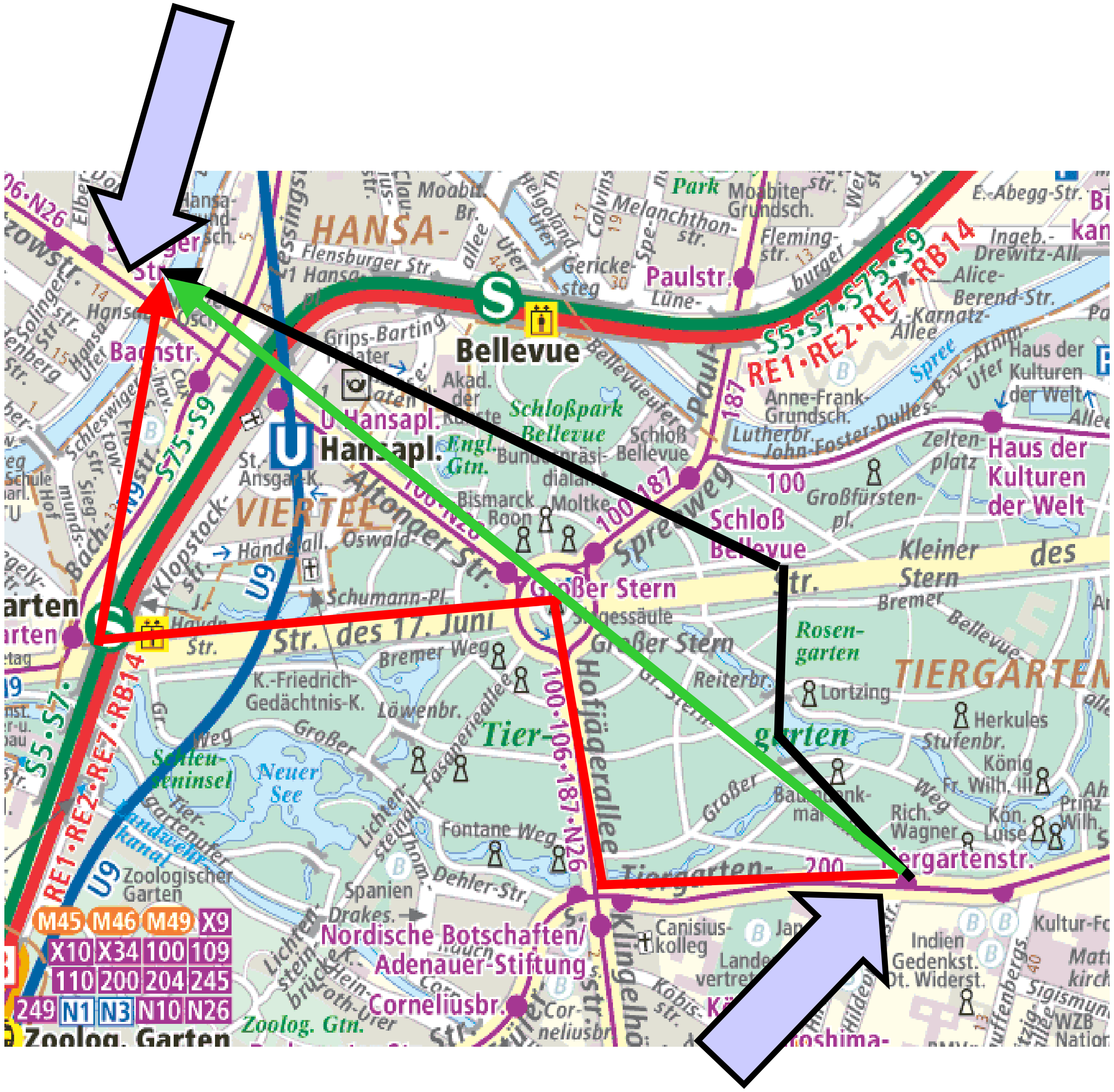
- Links in die Tiergartenstraße
- Rechts in die Hofjägerallee
- Kreisverkehr Rechts in die Altonaerstrasse
- Rechts in die Bachstrasse

Thomas Schlechte

Ziele

- schnellster
- kürzester
- günstigster
- ...

Welchen Weg suchen wir ?



Thomas Schlechte

Anwendungen

Überall im Alltag !

- Routenplaner
- Navigations-systeme
- Fahrplan-auskunft

Thomas Schlechte

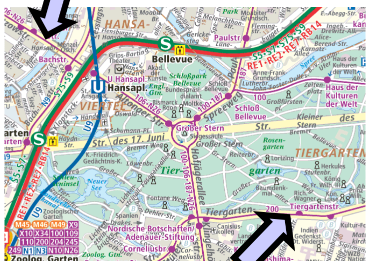
Lösung

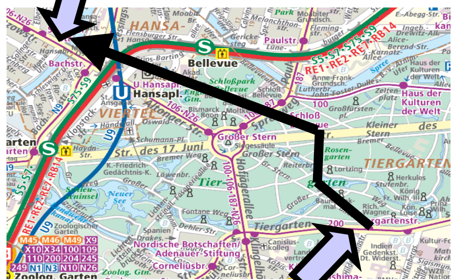
Aber wie funktioniert das ?

?

Lokalisierung
GPS

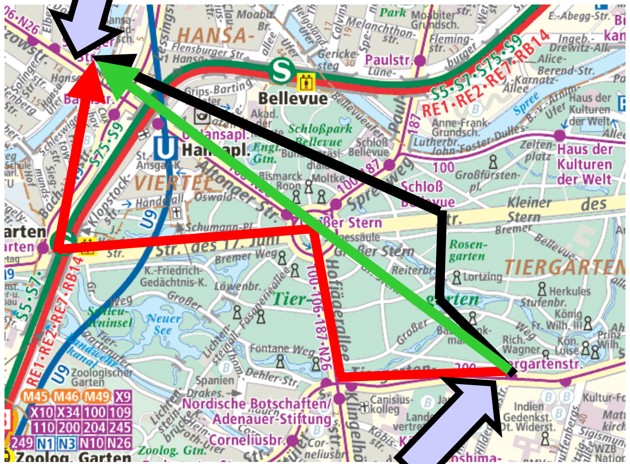
Routing





Abstraktion

Realität



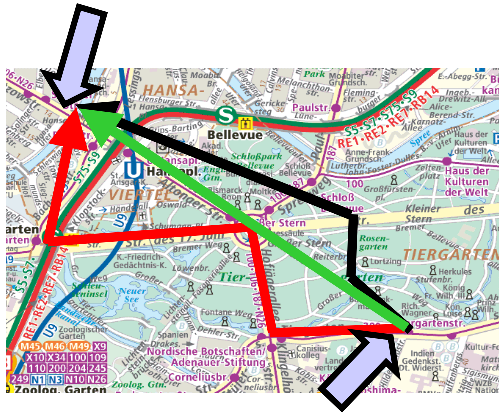
Problem Modellieren

Lösungen Evaluieren

Mathematik

Definitionen, Sätze,
Beweise, Algorithmen

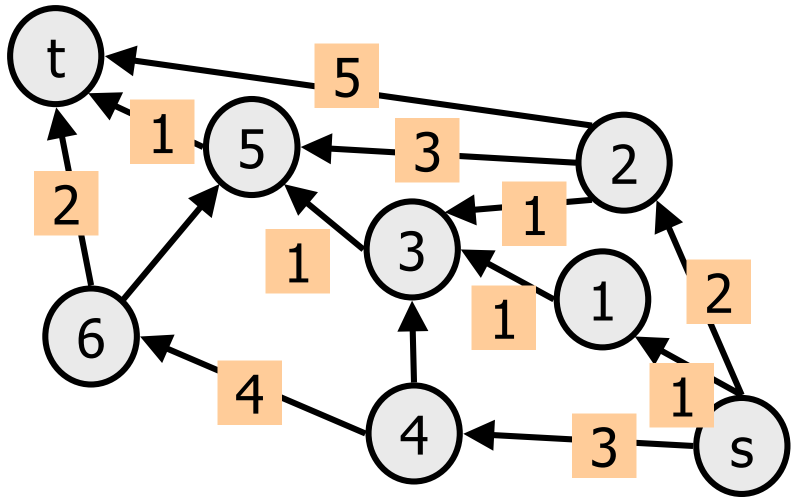
Modellierung



Kreuzungen → Knoten (1)

Strassen → Kanten

Fahrzeiten → Kantengewichten 2

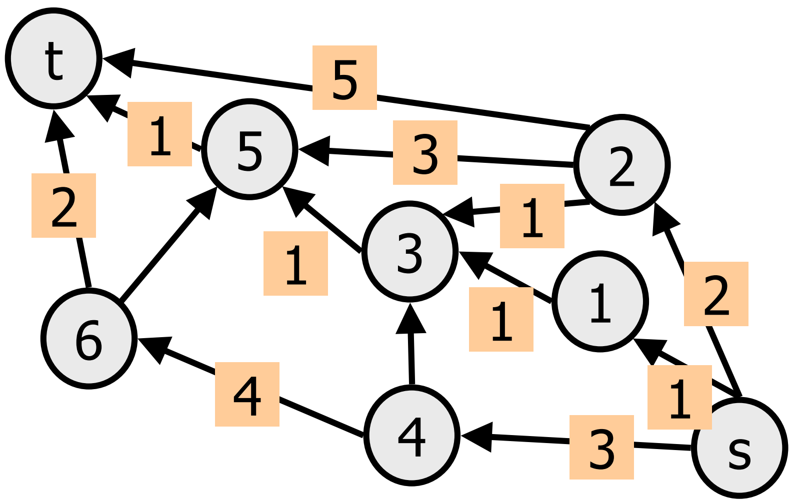


Graphentheorie

Modellierung

Graph G =(V,A)

V = Menge aller Knoten {s,t,1,2,3,4,5,6}
A = Menge aller Kanten {(s,1),(s,2),(s,4)....}
c = Abbildung der Kosten (Fahrzeiten)
{c(s,1) -> 1, c(s,4) -> 3, ...}



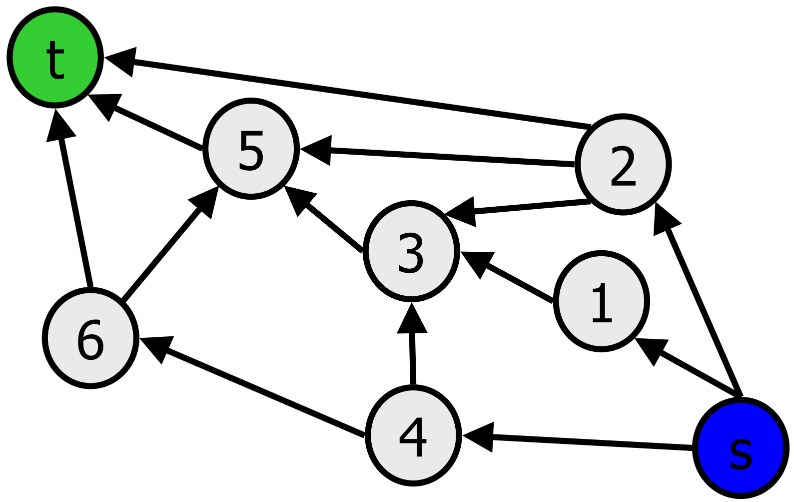
Kürzeste Wege Problem

Modellierung

Gegeben: Graph G =(V,A), Kostenfunktion c(a)

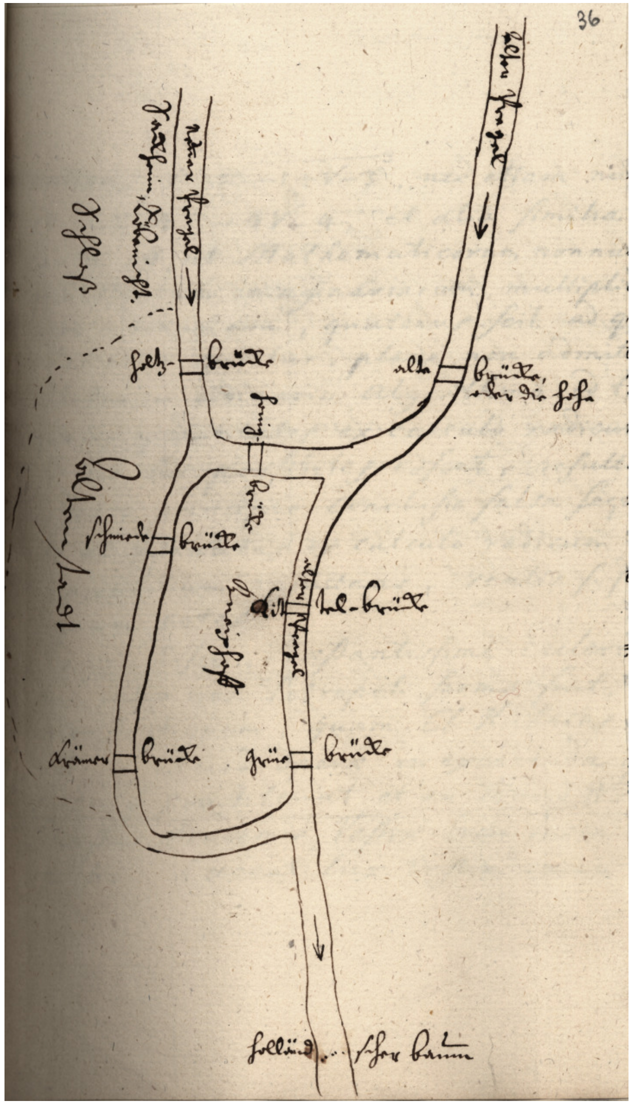
Gesucht: kürzester Weg von s nach t

(mit minimalen Kosten bzgl. c(a))



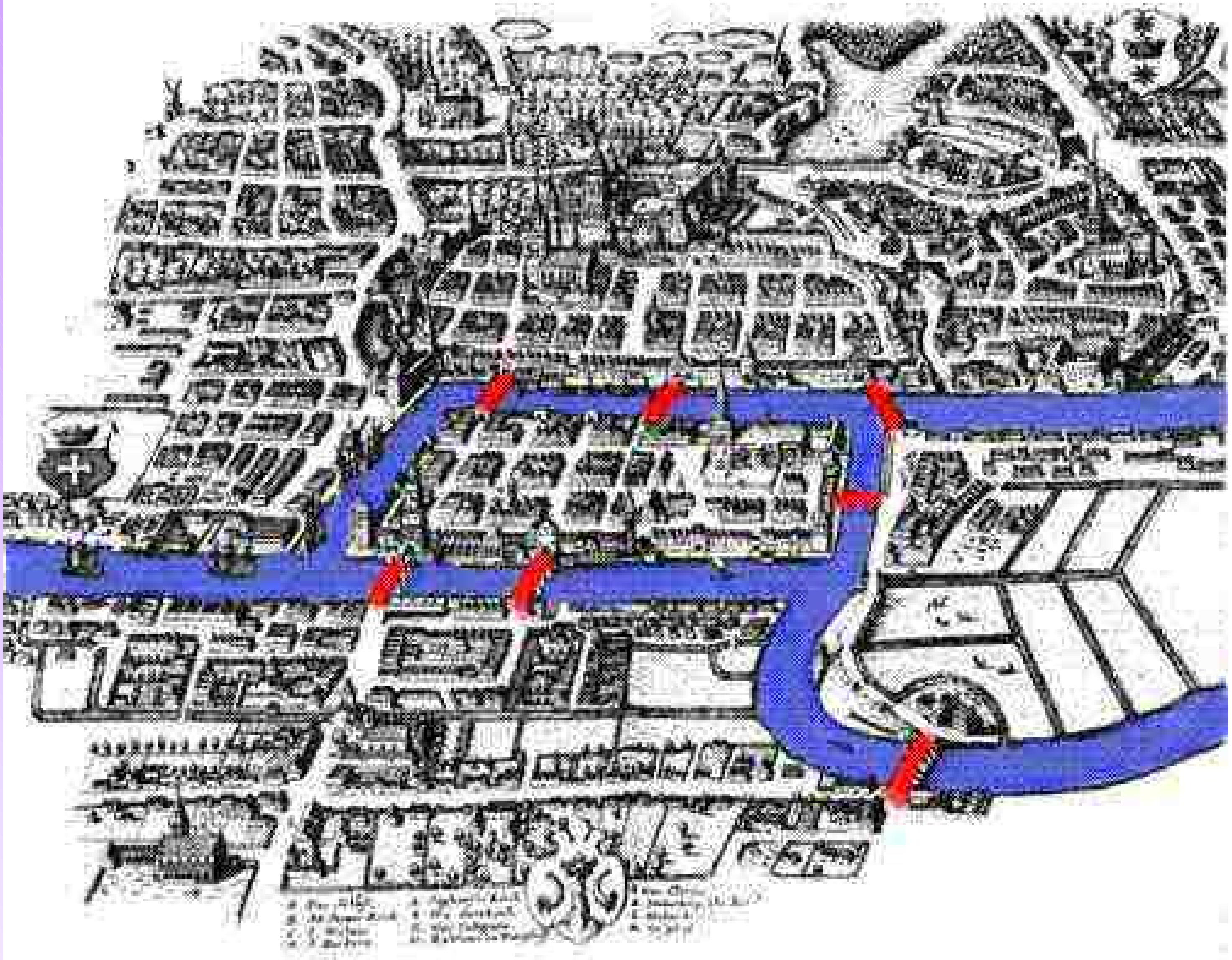
Historisches

Leonhard Euler
(1707-1783)



Scans erstellt von Wladimir Velminski für seine Doktotarbeit in Kunstgeschichte an der HU bei Prof. Bredekamp (~2008)

Königsberg



Thomas Schlechte

Das Problem

a Grüne Brücke

b Köttelbrücke

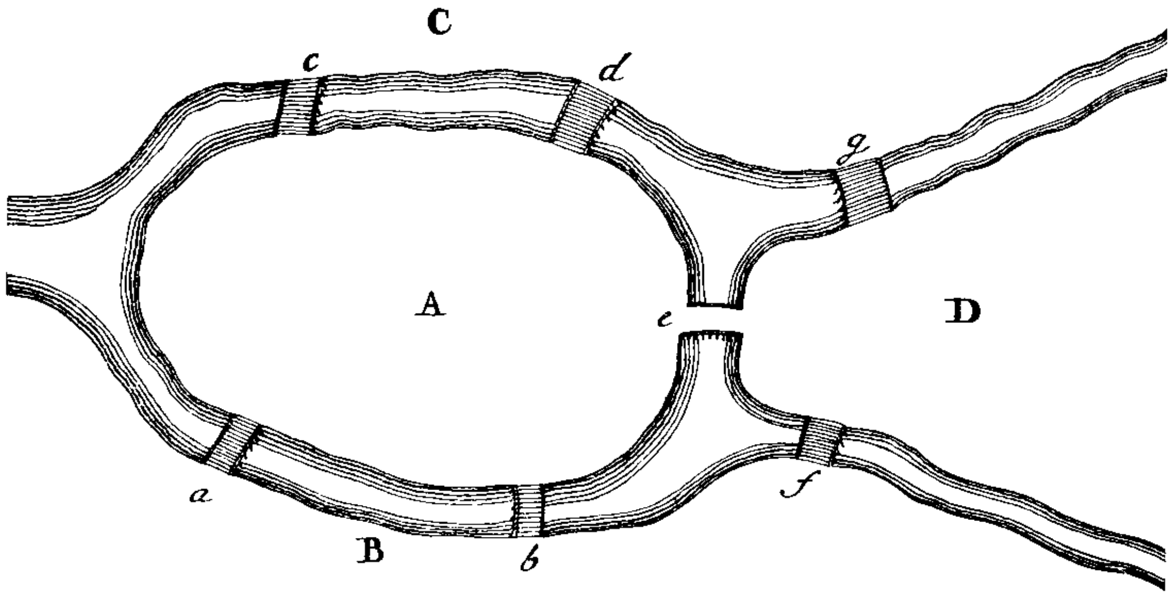
c Krämerbrücke

d Schmiedebrücke

e Honigbrücke

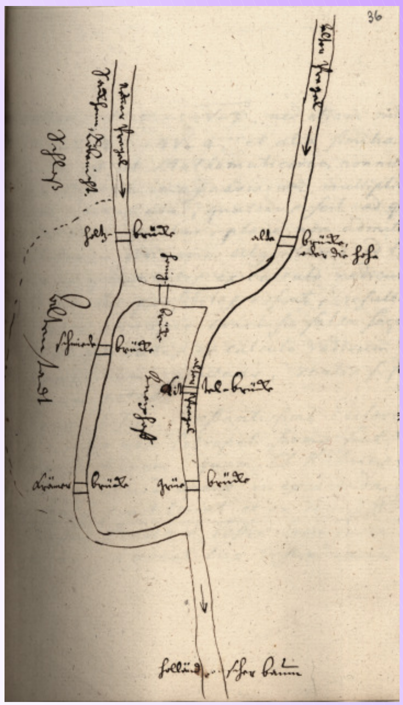
g Holzbrücke

f Hohe Brücke



„Das Problem, das ziemlich bekannt sein soll, war folgendes. Zu Königsberg in Preußen ist eine Insel A, genannt „der Kneiphof", und der Fluß, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie dies aus Fig. 1 ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flußes führen sieben Brücken a, b, c, d, e, f und g. Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spaziergang so einrichten könne, daß er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreite. Es wurde mir gesagt, daß einige diese Möglichkeit verneinen, andere daran zweifeln, daß aber niemand sie erhärte. Hieraus bildete ich mir folgendes höchst allgemeine Problem: Wie auch die Gestalt des Flußes und seine Verteilung in Arme, sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht."

Enumeration



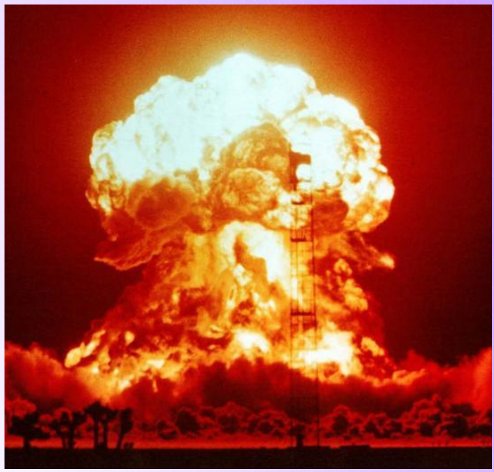
Anzahl der Spaziergänge (im schlimmsten Fall)

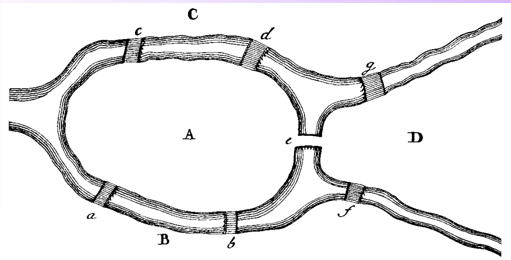
Hier: 7!/2 = 7*6*5*4*3 = 2.520

Allgemein: $n!/2 \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}/2$ (Stirling-Formel)

„Was das Königsberger Problem von den sieben Brücken betrifft, so könnte man es lösen durch eine genaue Aufzählung aller Gänge, die möglich sind; denn dann wüßte man, ob einer derselben der Bedingung genügt oder keiner. Diese Lösungsart ist aber wegen der großen Zahl von Kombinationen zu mühsam und schwierig, und zudem könnte sie in andern Fragen, wo noch viel mehr Brücken vorhanden sind, gar nicht mehr angewendet werden. Würde die Untersuchung in der eben erwähnten Weise geführt, so würde Vieles gefunden, wonach gar nicht gefragt war; dies ist zweifellos der Grund, warum dieser Weg so beschwerlich wäre. Darum habe ich diese Methode fallengelassen und eine andere gesucht, die nur so weit reicht, daß sie erweist, ob ein solcher Spaziergang gefunden werden kann oder nicht; denn ich vermutete, daß eine solche Methode viel einfacher sein würde.“

Enumeration





Kombinatorische Explosion

n	Lineares Wachstum (n)	Quadratisches Wachstum (n^2)	Exponentielles Wachstum (n!)
1			
2			
3			
...			
5			
6	**6**	**36**	**720**
10	**10**	**100**	**362880**
13	**13**	**169**	**479001600**

Thomas Schlechte

Das Problem

a Grüne Brücke

b Köttelbrücke

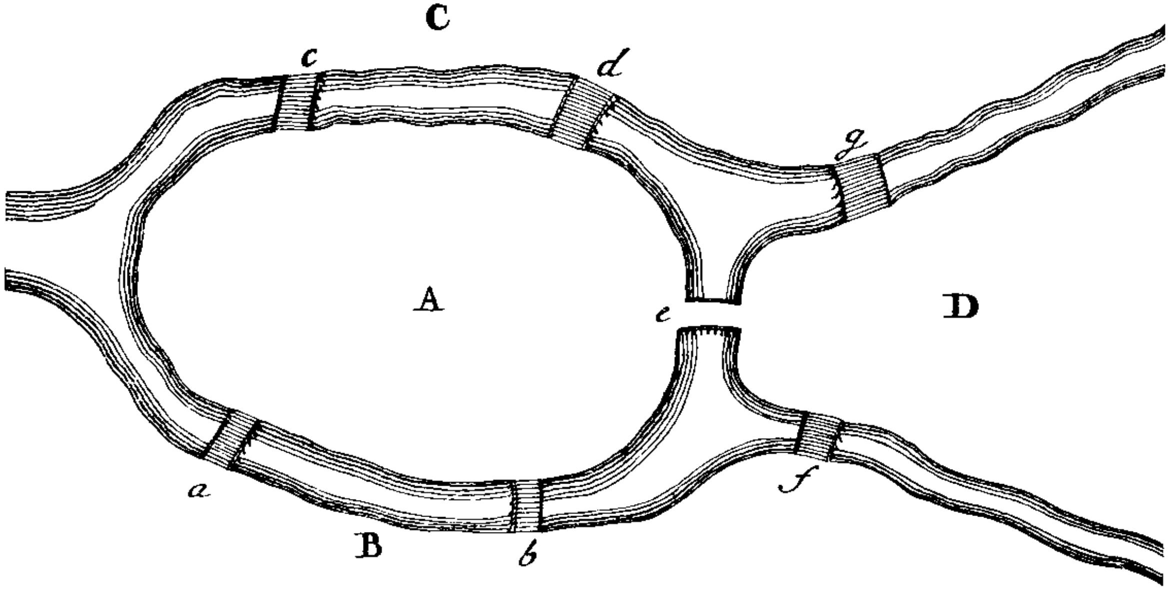
c Krämerbrücke

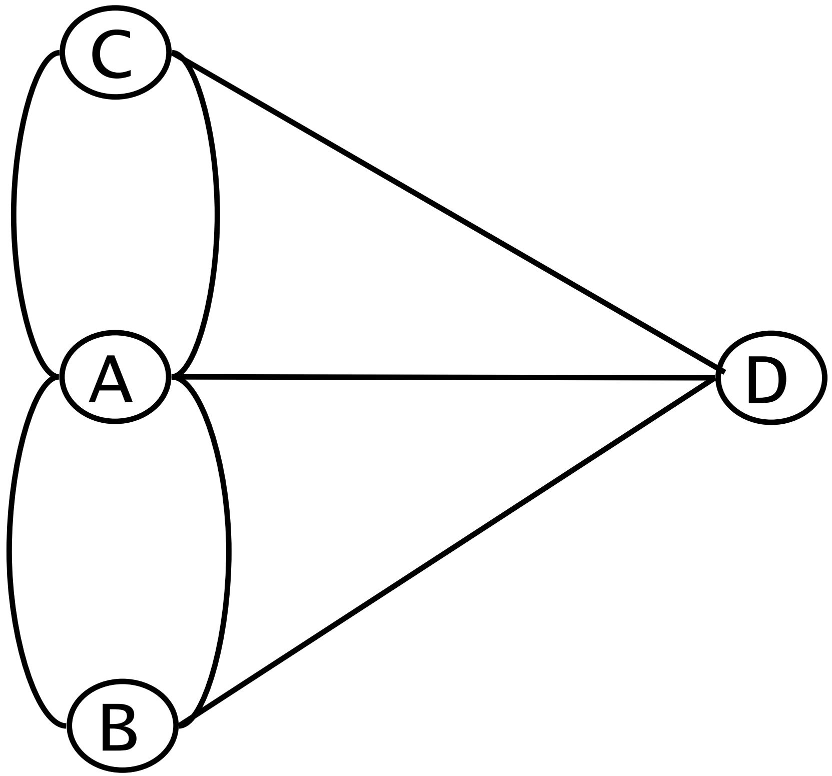
d Schmiedebrücke

e Honigbrücke

g Holzbrücke

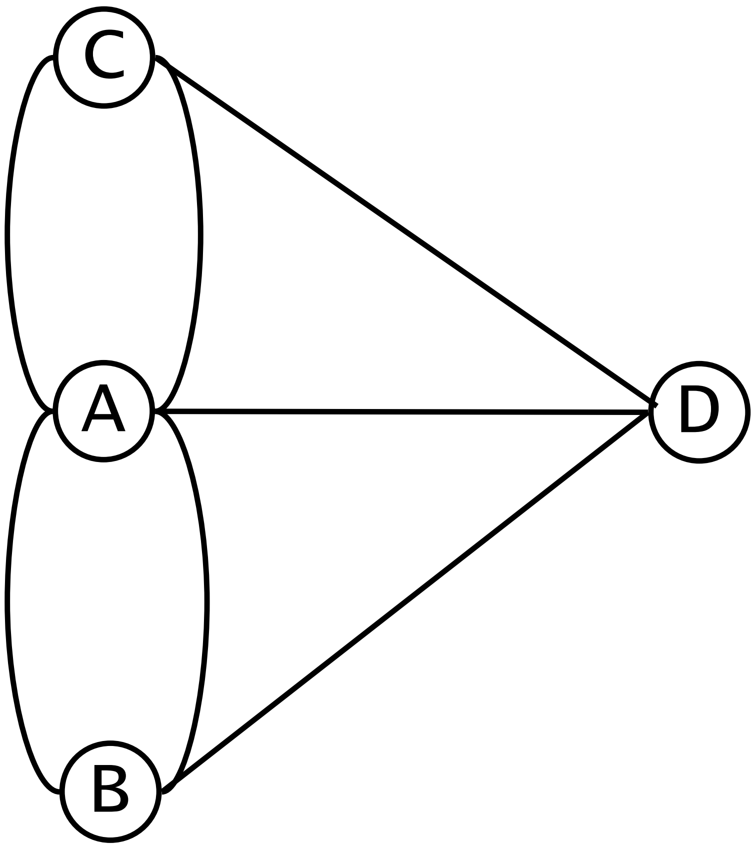
f Hohe Brücke





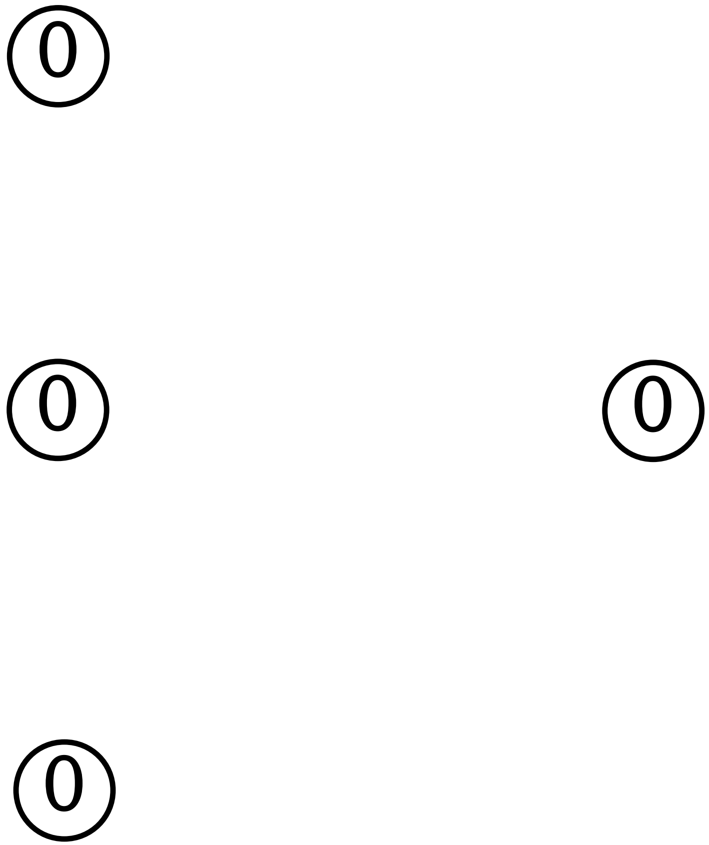
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



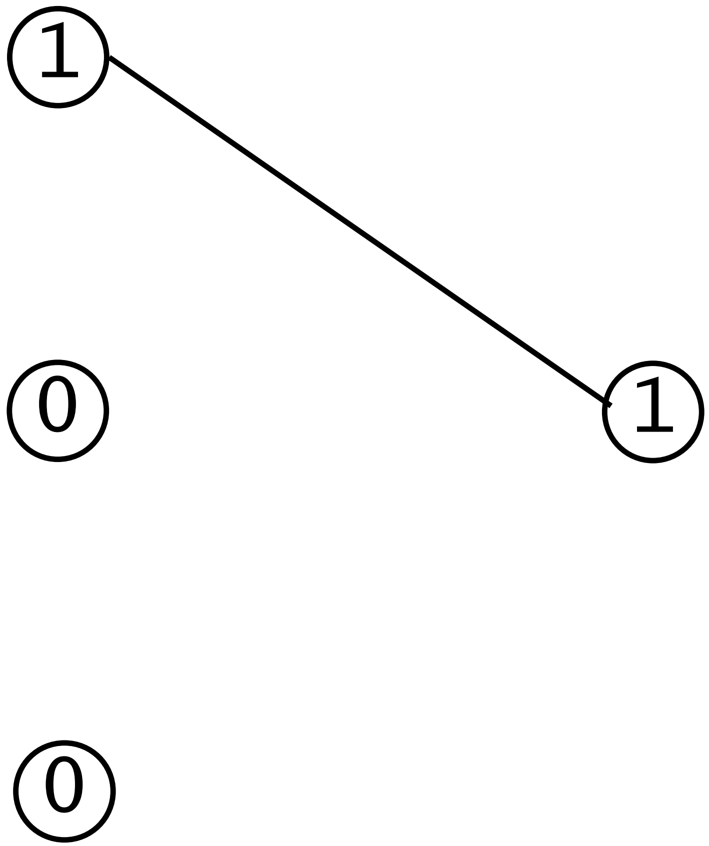
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3 D
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



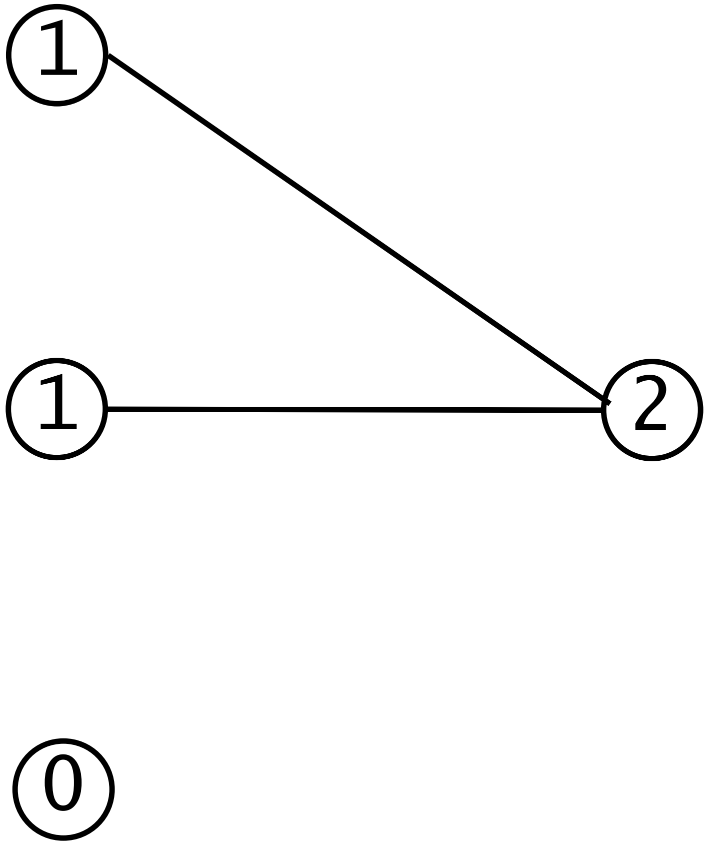
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



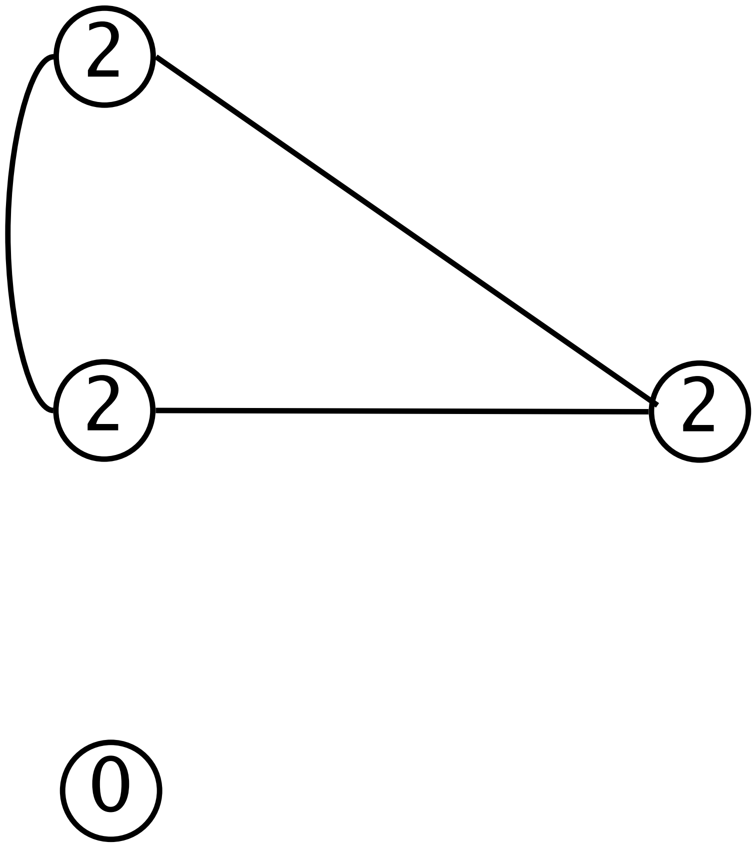
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3 D
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



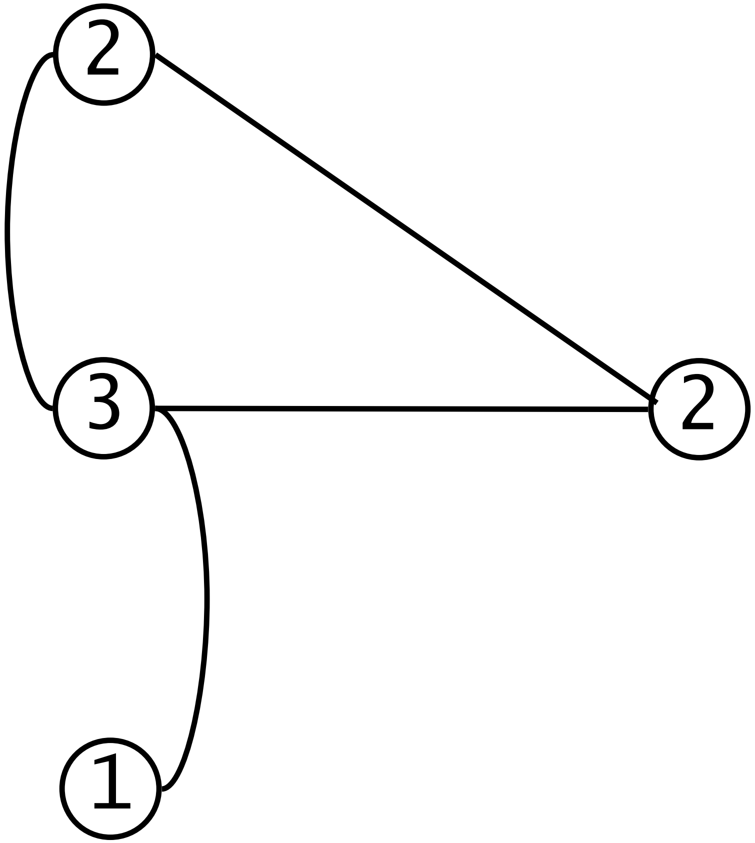
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3 D
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



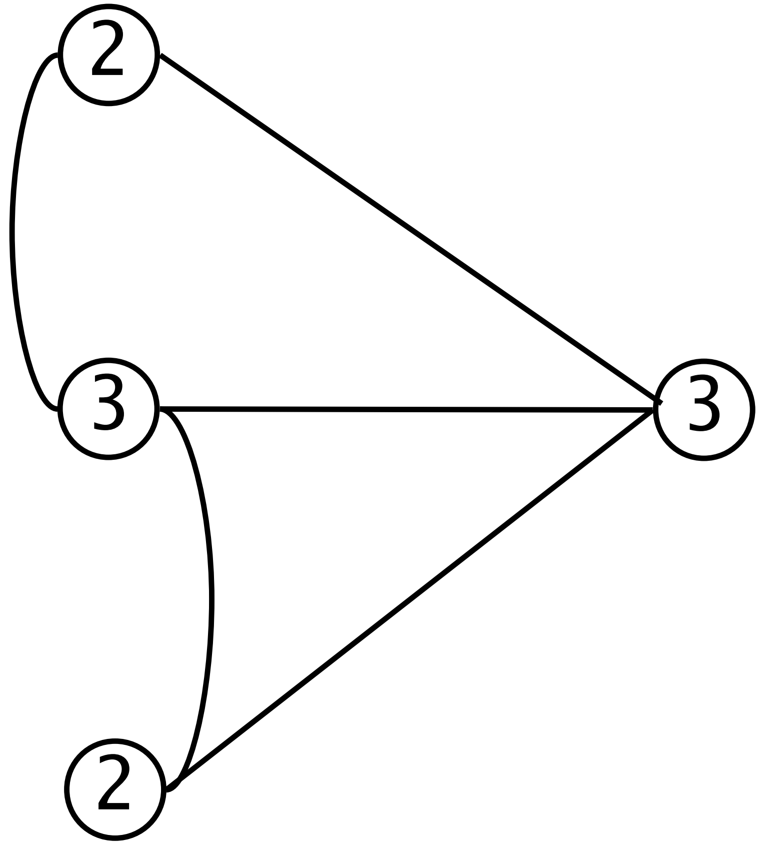
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3 D
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



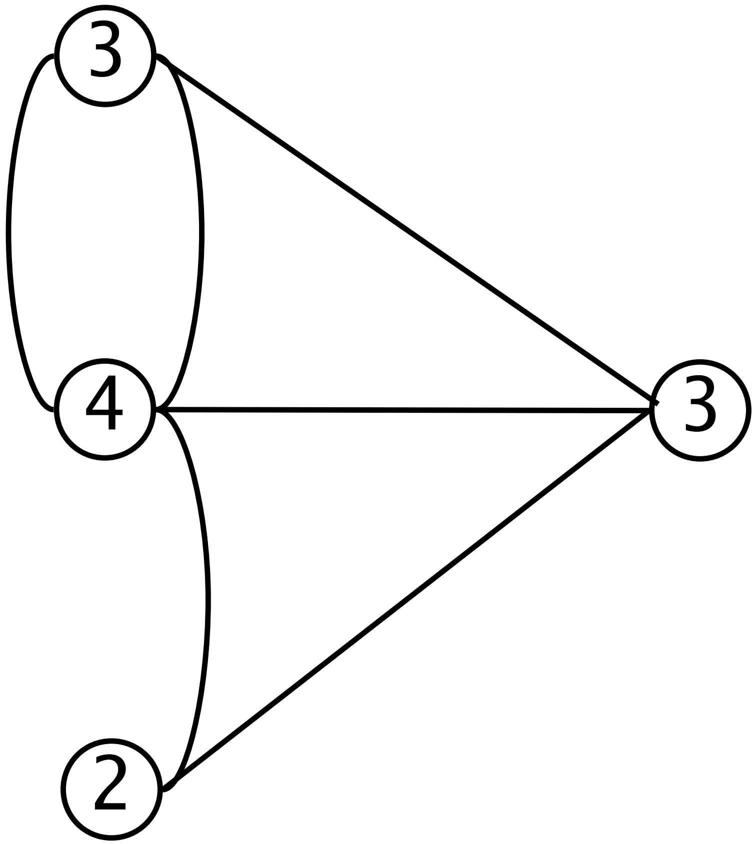
Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3 D
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**



Graphentheorie

- Knoten
- Kanten
- Grad 3
- **Satz: Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.**

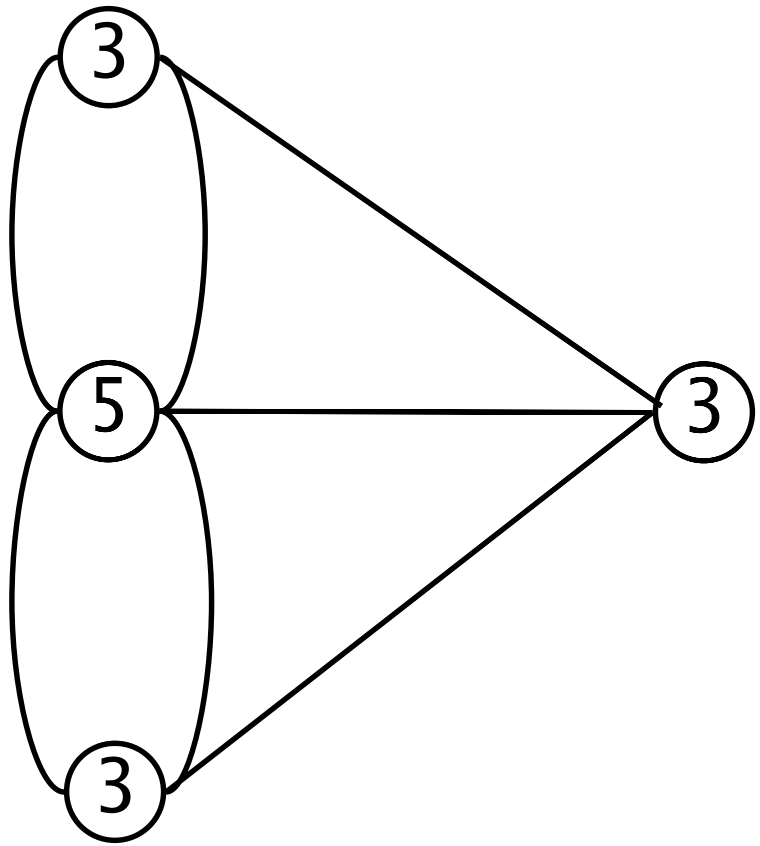


Graphentheorie

Satz:
Die Anzahl der ungeraden Knoten ist gerade.

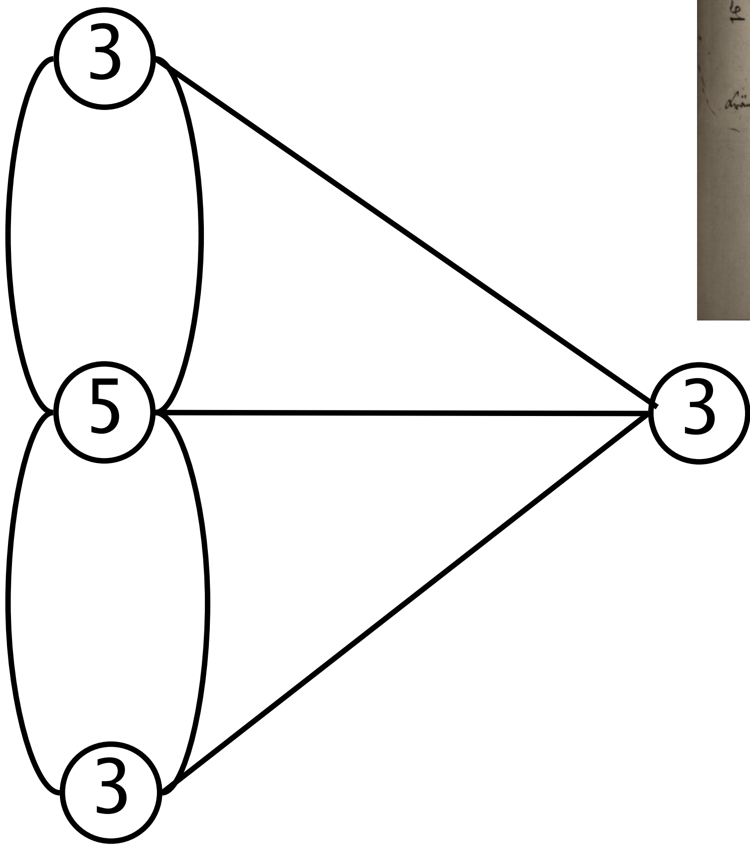
Beweis:
Kanten++:

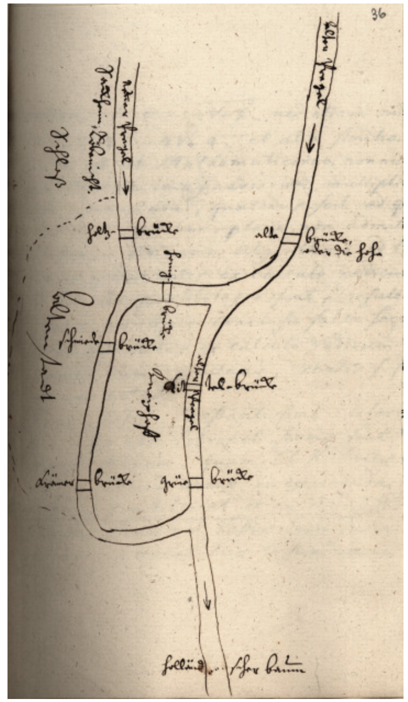
uu $\rightarrow$ gg (-2)
ug $\rightarrow$ gu ($\pm$0)
gg $\rightarrow$ uu (+2)



Lösung:

Es gibt keinen (Euler-) Weg, weil mehr als 2 Knoten ungeraden Grad haben.

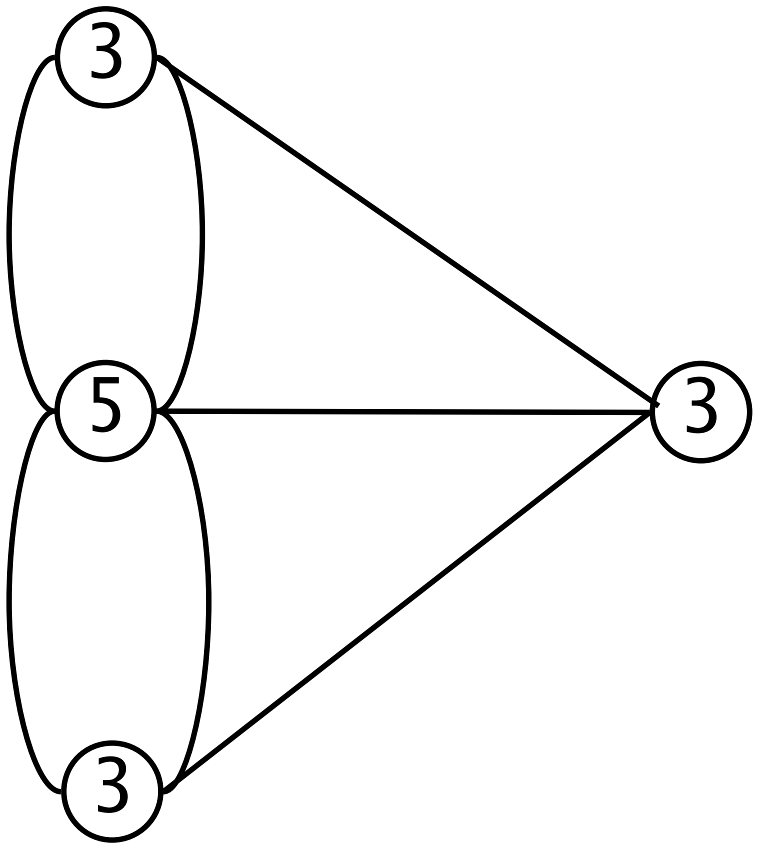




Graphentheorie

Satz:

Einen Eulerweg gibt es genau dann, wenn G zusammenhängend ist und höchstens 2 Knoten ungeraden Grad haben.

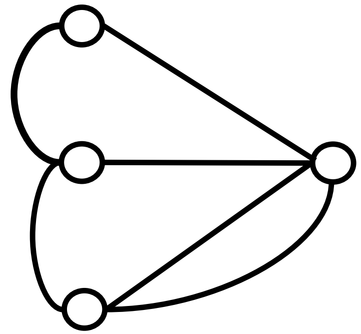


Graphentheorie

Satz:

Einen Eulerweg gibt es genau dann, wenn G zusammenhängend ist und höchstens 2 Knoten ungeraden Grad haben.

- **Algorithmischer Beweis:**
  - **Starte in beliebigen Knoten**
  - **Laufe Kanten ab bis man zurückkehrt**
  - **Lösche Kreis**
  - **Wiederhole das bis keine Kanten mehr da sind**

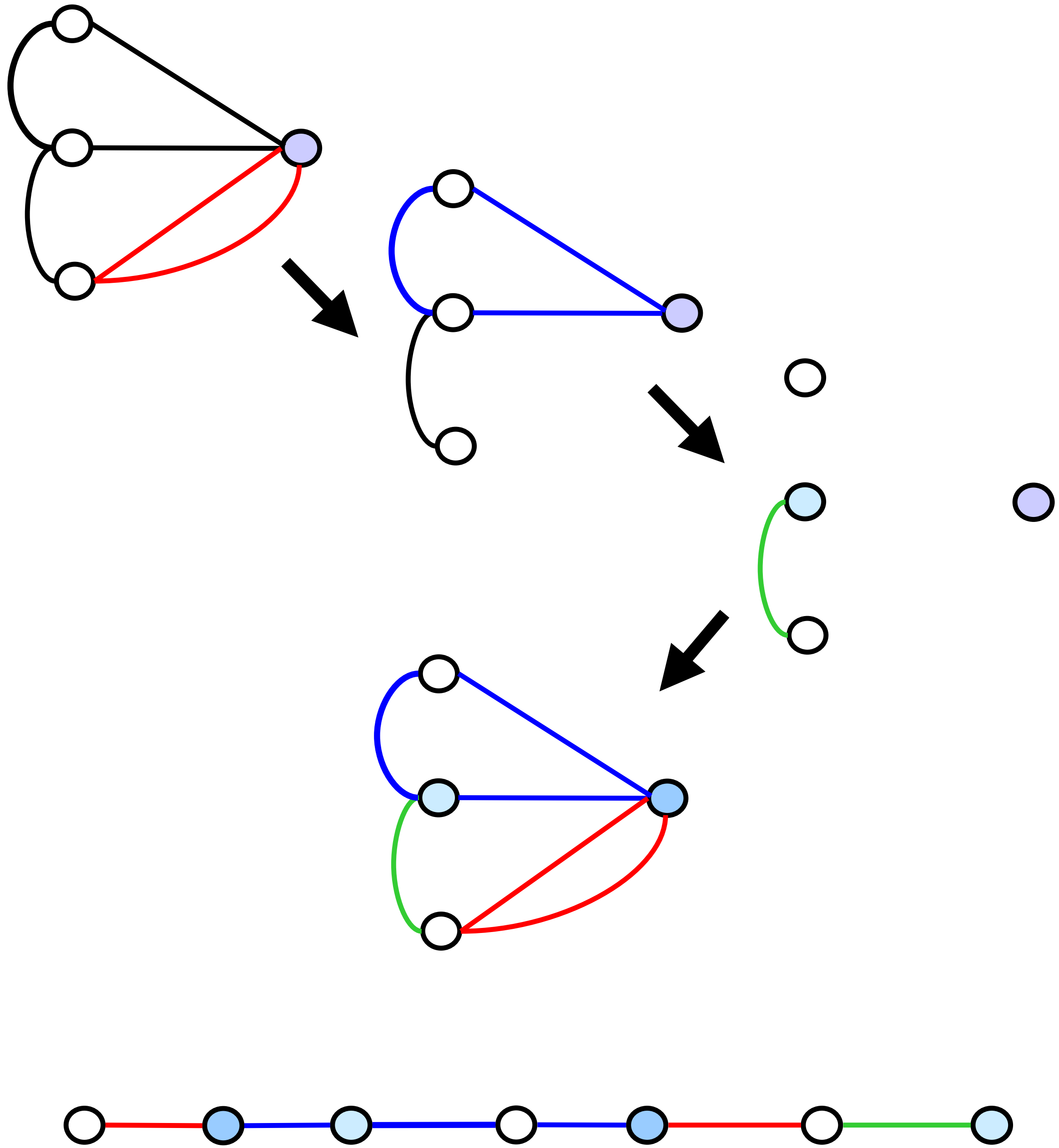


Zerlegung in Kreise und maximal einen Weg !

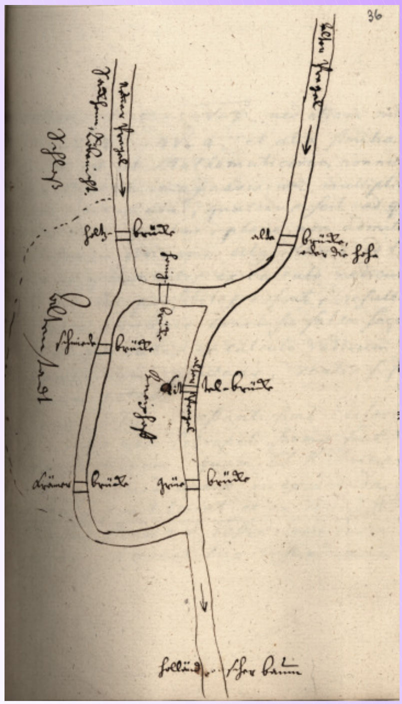
Graphentheorie

Satz:

Einen Eulerweg gibt es genau dann, wenn G zusammenhängend ist und höchstens 2 Knoten ungeraden Grad haben.

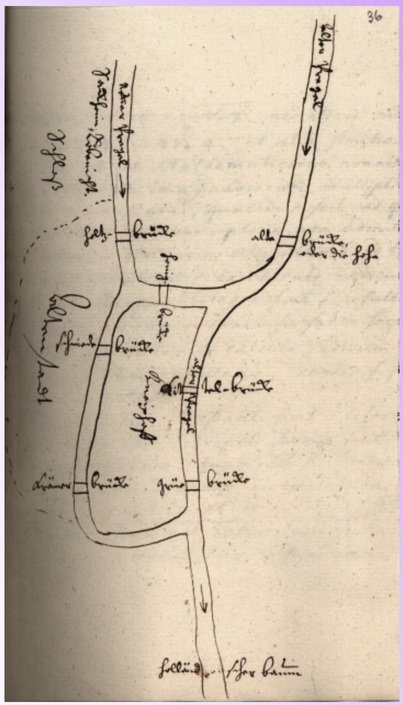


Eulerweg

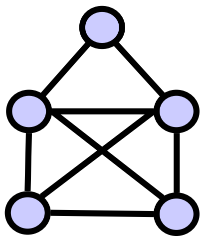


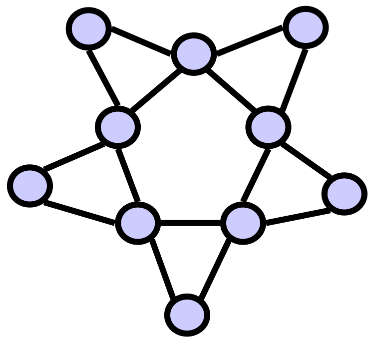
- ... ist einfach! Wir können leicht
  - entweder einen Eulerweg finden
  - oder beweisen, dass es keine gibt.

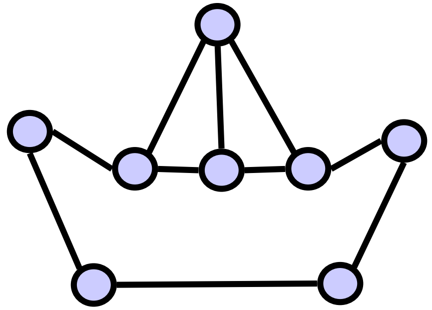
Beispiele



- ... ist einfach! Wir können leicht (linearer Zeit)
  - entweder eine Eulertour finden
  - oder beweisen, dass es keine gibt.





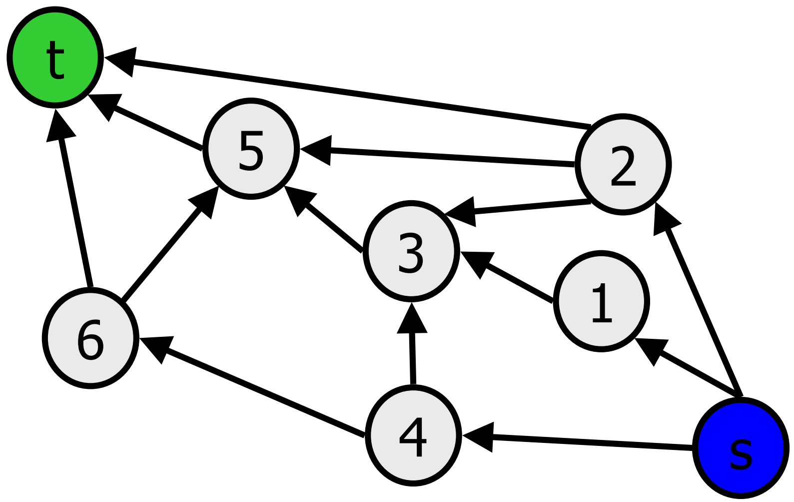


Kürzeste Wege

Kürzeste Wege Problem

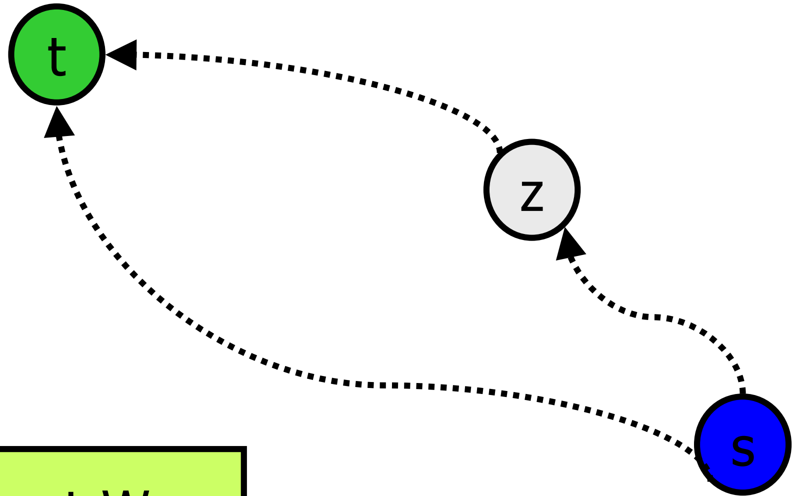
Gegeben: Graph G =(V,A), Kostenfunktion c(a)

Gesucht: kürzester Weg von s nach t
(minimale Kosten)



Dijkstra's - Idee

**Edsgar W. Dijkstra
(1930-2002)**

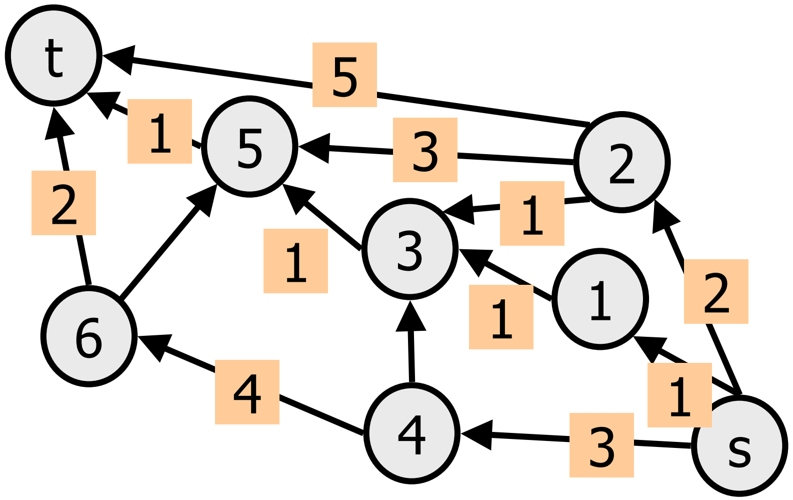


kürzester s-t-Weg <=

kürzester s-z-Weg + kürzester z-t-Weg

Lösung

Knoten :	s	1	2	3	4	5	6	t
aktuelle kürzeste Distanz :	0	?	?	?	?	?	?	?



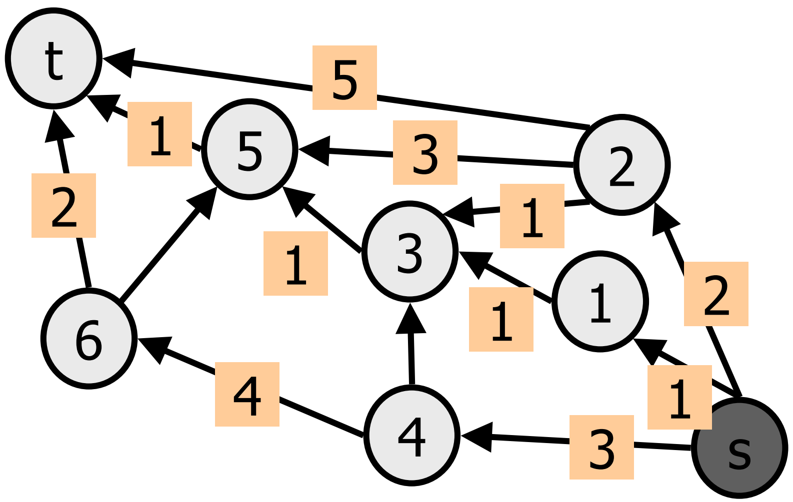
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten

s	1	2	3	4	5	6	t
0	?	?	?	?	?	?	?



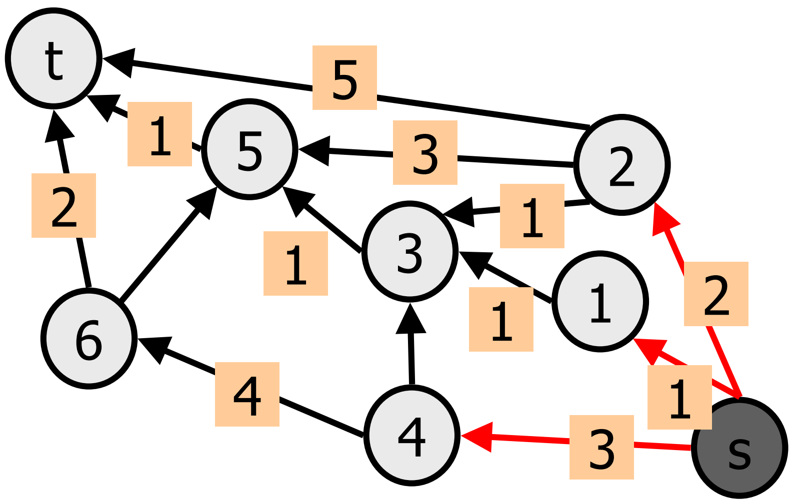
Lösung

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten

Annahme: Keine negativen Gewichte

s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	?	3	?	?	?



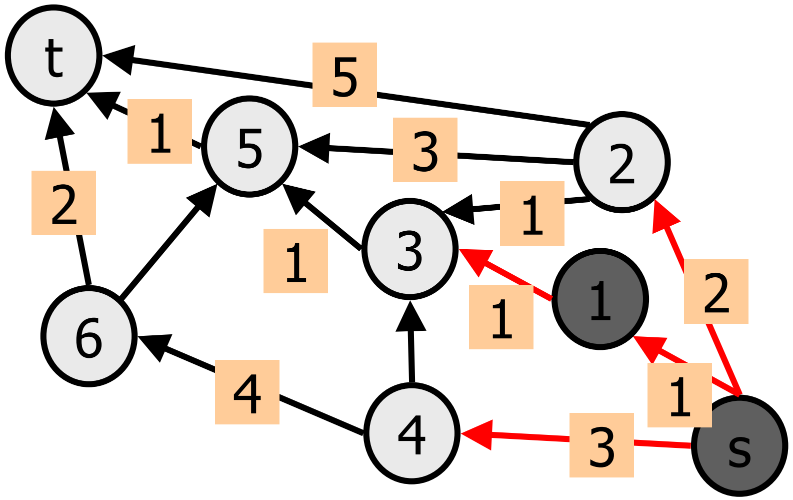
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten

s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	2	3	?	?	?



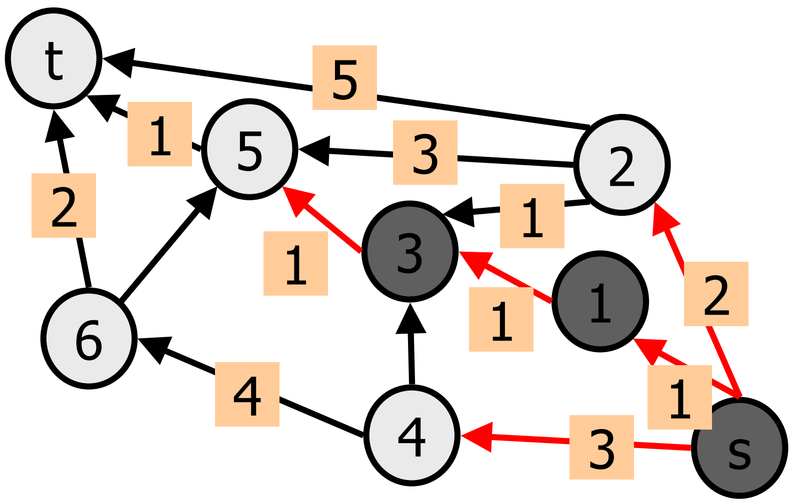
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten

s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	2	3	3	?	?



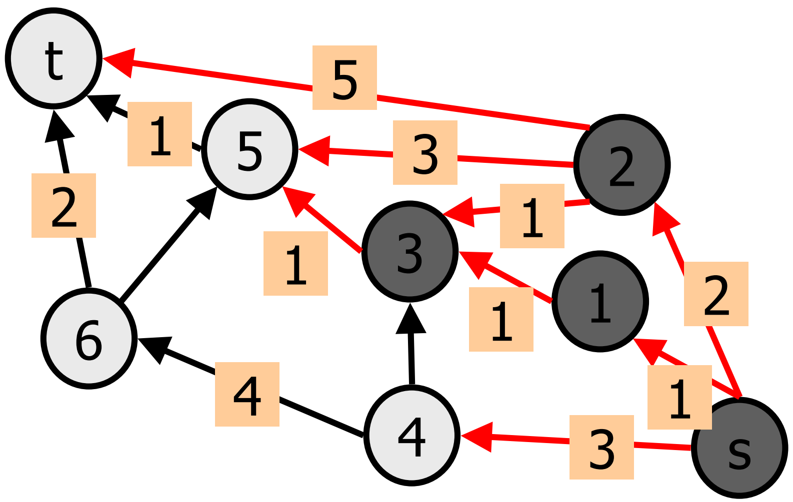
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten

s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	2	3	3	?	7



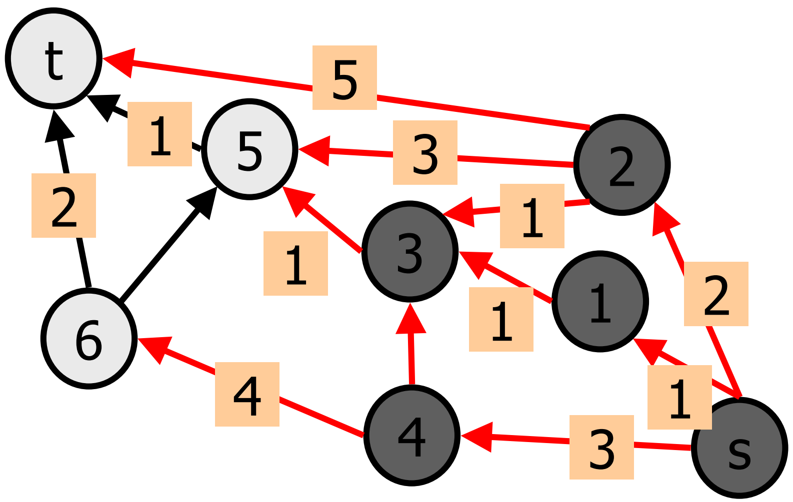
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten

s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	2	3	3	7	4



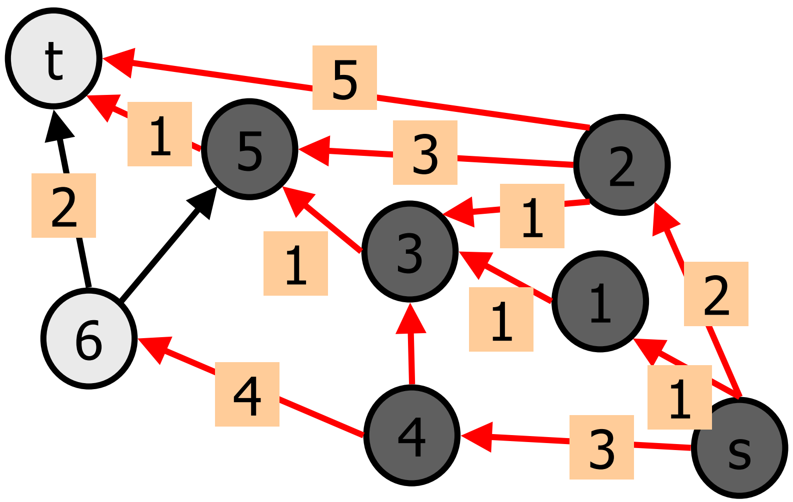
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	2	3	3	7	4

s - Knoten fertig

- aktueller Knoten



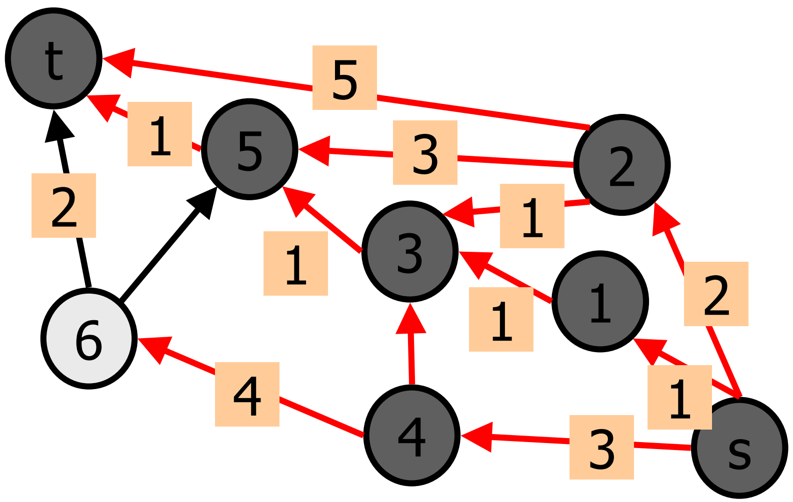
Lösung

Annahme: Keine negativen Gewichte

	s	s	1	s	3	4	5
s	1	2	3	4	5	6	t
0	1	2	2	3	3	7	4

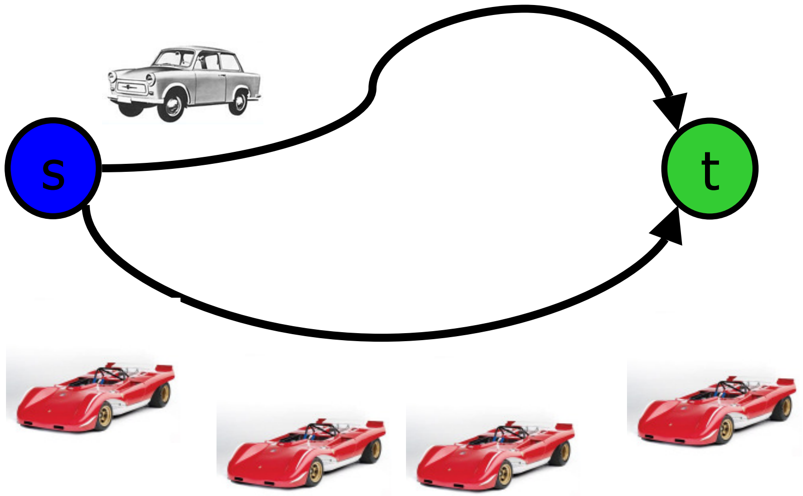
s - Knoten fertig

- aktueller Knoten



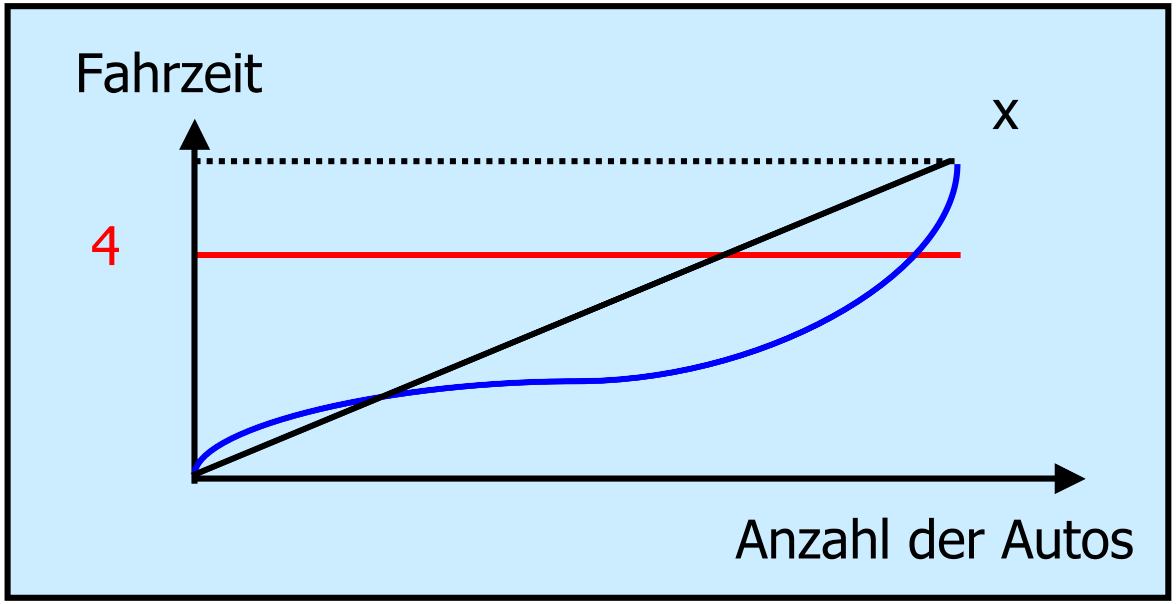
Grenzen

- Kapazitäten der Kanten (Fahrbahnen)
- Fahrzeitfunktionen (wachsend)

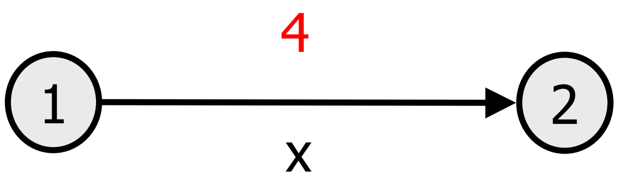


Erweiterung

Fahrzeitfunktionen in Abhängigkeit der fahrenden Autos !

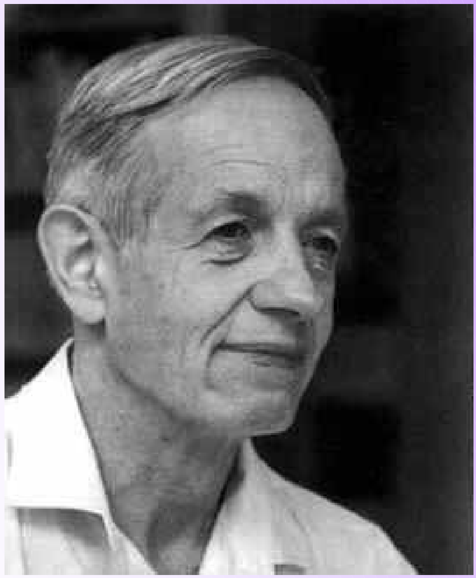


Je mehr Autos auf einer Strasse fahren, umso grösser wird die Fahrzeit !



Gleichgewichte

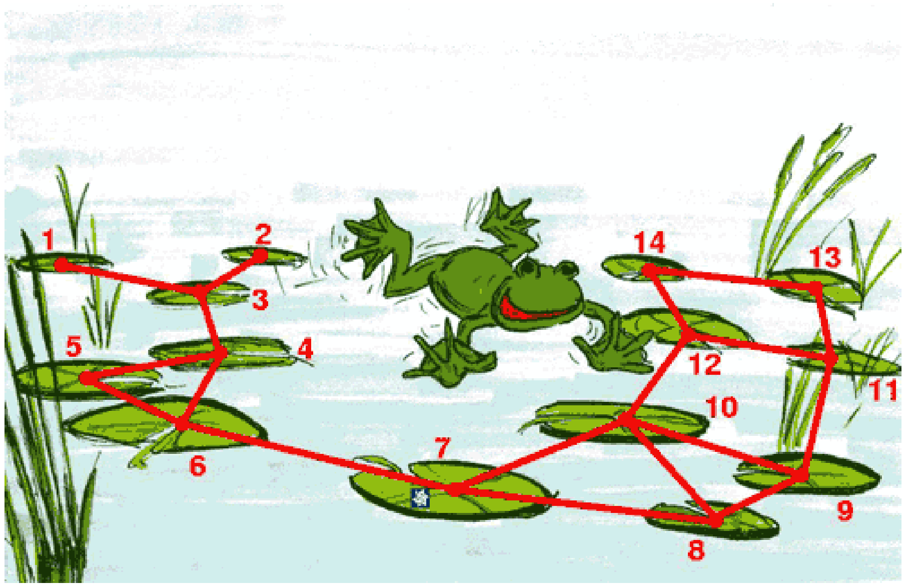
John F. Nash
(1928-)



Nash-Gleichgewicht

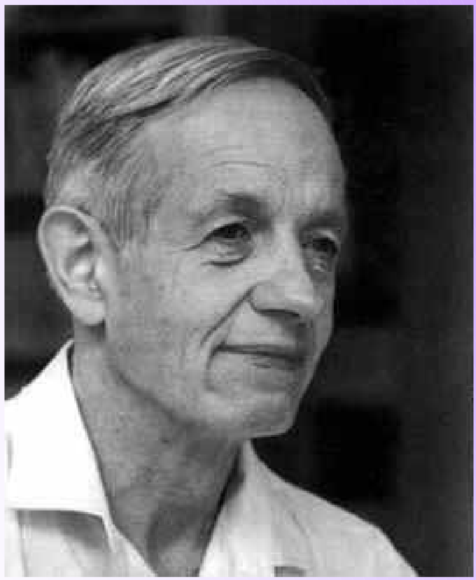
„Eine intuitive Definition“:

Das Nash-Gleichgewicht beschreibt eine Situation, in der sich keiner der Spieler mehr aus seiner Froschperspektive heraus verbessern kann.

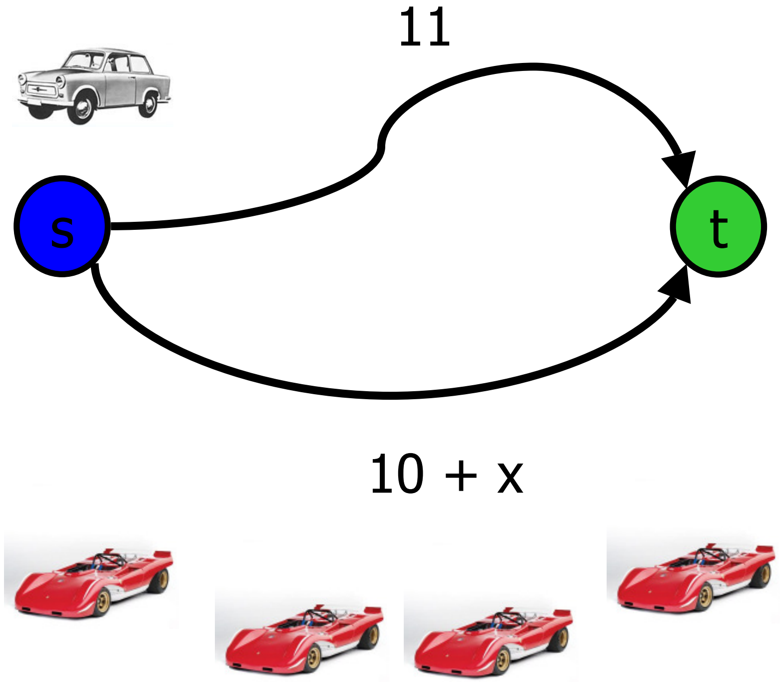


Gleichgewichte

John F. Nash
(1928-)

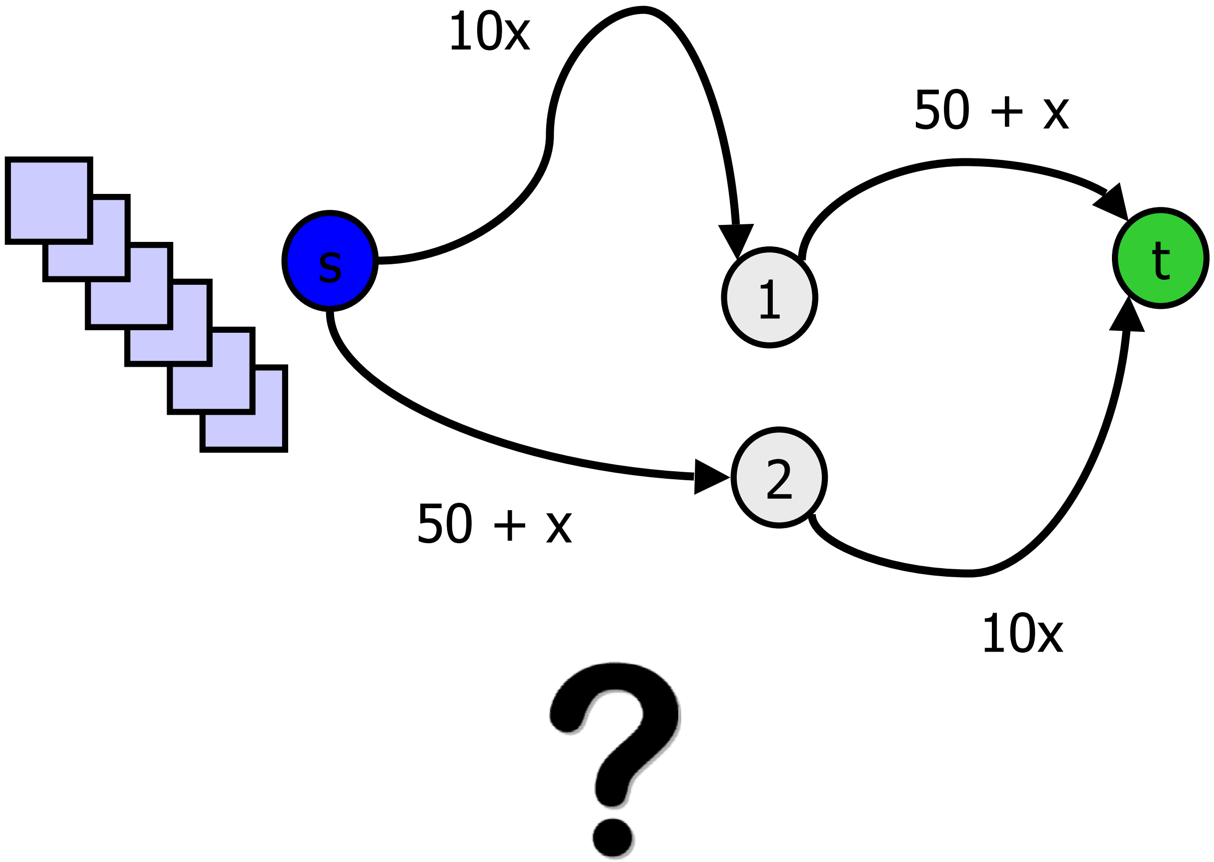


Nash-Gleichgewicht



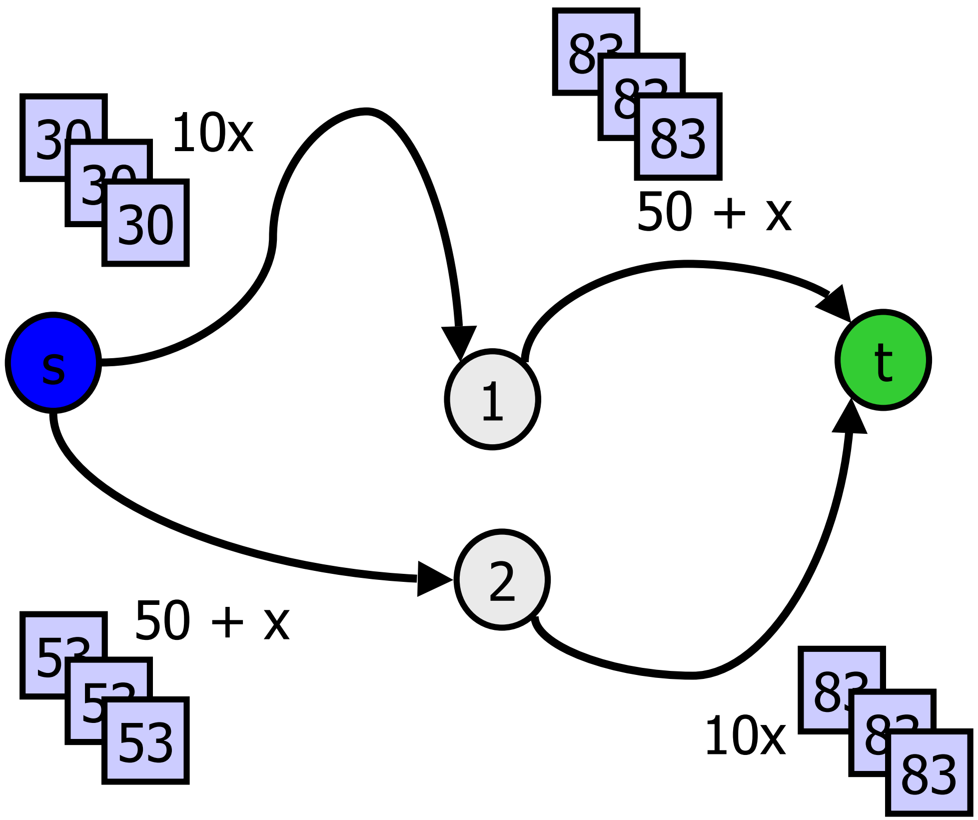
Im Gleichgewicht hätten alle eine Fahrzeit von 11 !

Beispiel



Lösung

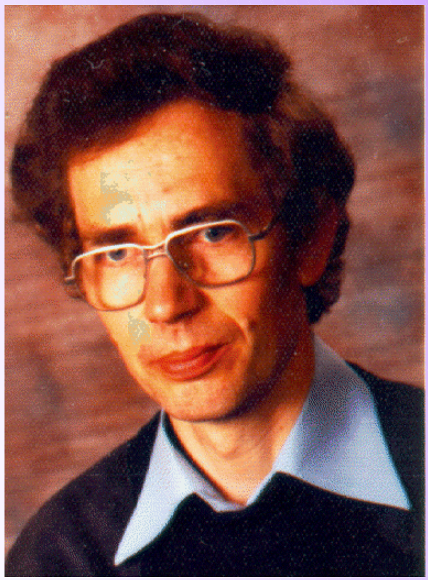
Keiner kann sich verbessern !



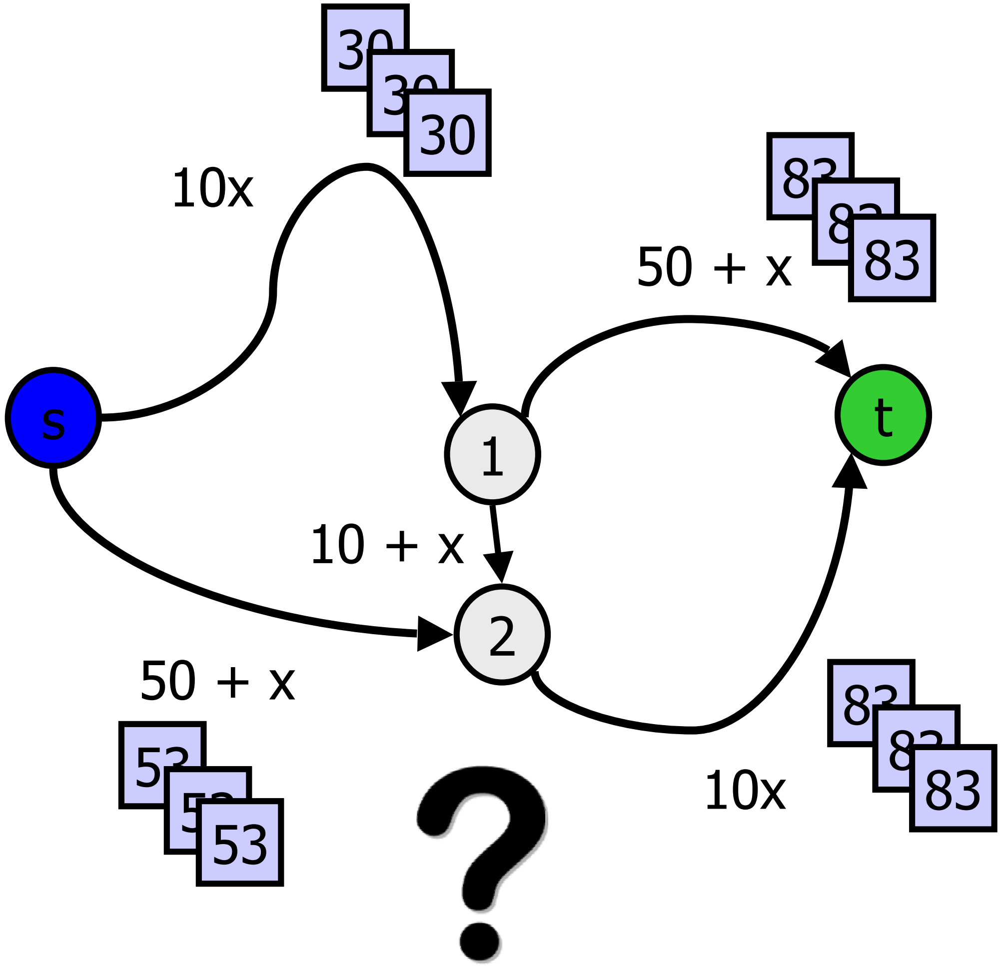
Im Gleichgewicht haben alle eine Fahrzeit von 83 !

Ausbau Szenario

Dietrich Braess
(1930-2002)

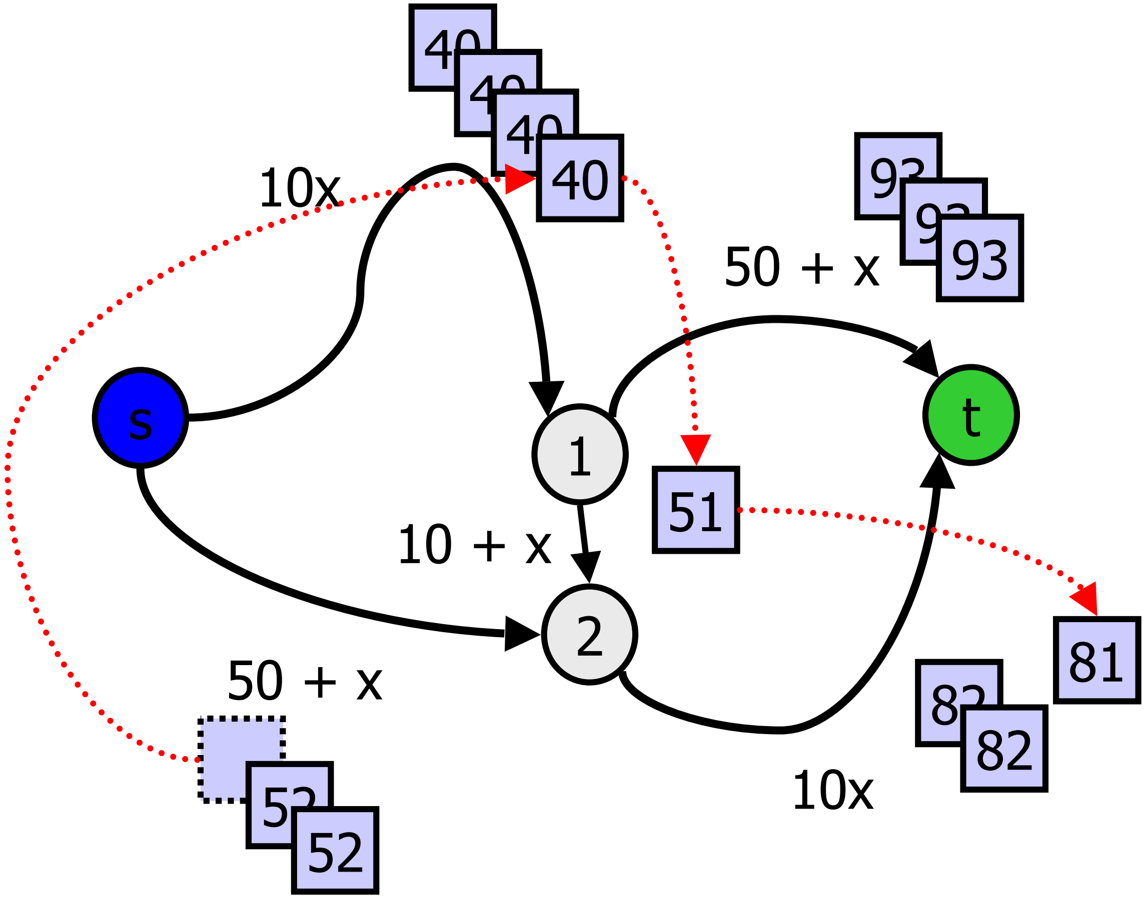


Ausbau des Netzes durch neue Verbindung ?!?



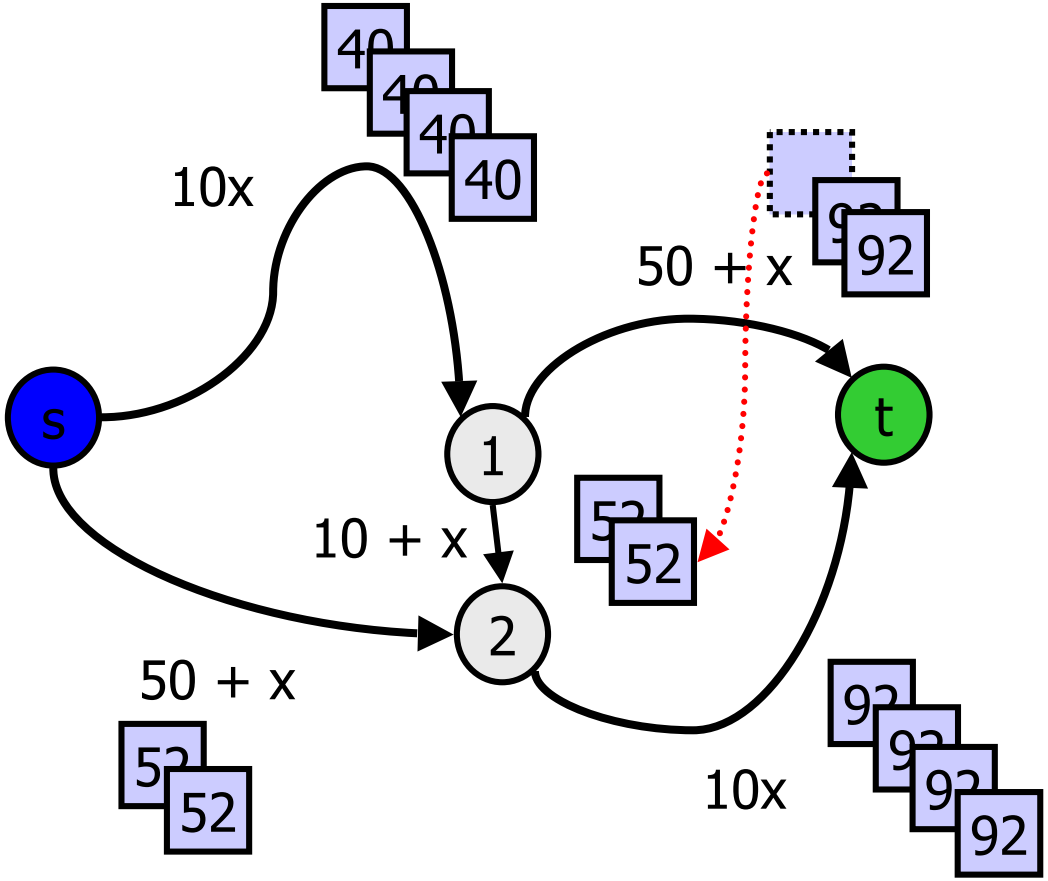
Ausbau Szenario

Ausbau des Netzes durch neue Verbindung ?!?



Neues Gleichgewicht

Keiner kann sich verbessern !



Im neuen Gleichgewicht haben alle eine Fahrzeit von 92 !

Braess-Paradoxon

Trotz Ausbau des Netzes haben sich alle um 9 Minuten verschlechtert ?!?

Die Mathematik der kürzesten Wege

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !